練習問題【解答】

第２章

2.1

電場は z 軸に関して対称となるから，原点から距離 r ， z 軸と角 θ（$0 < \theta < \pi$）となる点 P の電位を求める。(2.14)式より，電気双極子による点 P の電位は，無限遠を基準（ゼロ）として，

$$\phi_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

と表され，一様電場による P の電位は， $z = 0$ を基準にして，

$$\phi_0 = -E_0 r\cos\theta$$

と書ける。これより，合成電位は，

$$\phi = \phi_0 + \phi_p = \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - E_0\right) r\cos\theta \tag{2a}$$

と表されるから， $x - y$ 平面（$\cos\theta = 0$ すなわち $\theta = \pi/2$）以外にゼロとなる条件は，

$$r^3 = r_0^3 = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 E_0}$$

となる。これは，原点 O を中心にした半径 $r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 E_0}}$ の球面を表す。

(2a)式より， $r < r_0$ ， $\cos\theta > 0$（$0 < \theta < \pi/2$）のとき， $\phi > 0$
$r < r_0$ ， $\cos\theta < 0$（$\pi/2 < \theta < \pi$）のとき， $\phi < 0$
$r > r_0$ ， $\cos\theta > 0$（$0 < \theta < \pi/2$）のとき， $\phi < 0$
$r > r_0$ ， $\cos\theta < 0$（$\pi/2 < \theta < \pi$）のとき， $\phi > 0$

となり，図 2a を得る。

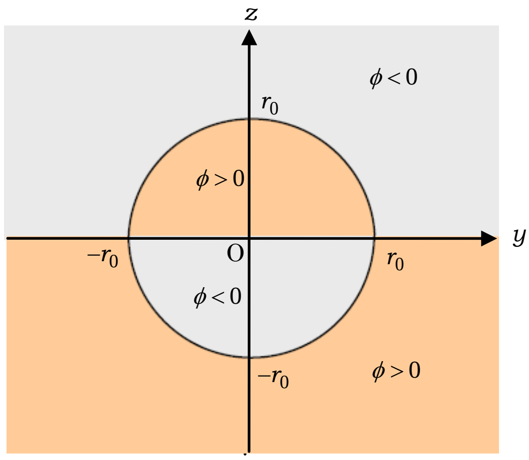

図 2a

2.2

点 A と D の双極子, 点 B と C の双極子による電場と電位を重ね合わせればよい。点 P での電場の x 成分と z 成分は，電荷の配置よりゼロである。

点 A と D による双極子の電場の y 成分 E_{1y} は，(2.12)の第 2 式で $r \to r - l/2$， $\theta = \pi/2$ としたものに等しく，

$$E_{1y} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(r - l/2)^3}$$

点 B と C による双極子の電場の y 成分 E_{1y} は，(2.12)の第 2 式で $r \to r + l/2$， $\theta = \pi/2$， $p \to -p$ としたものに等しく，

$$E_{2y} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(r + l/2)^3}$$

となる。これより， $p = ql$ を用いて，電場の y 成分

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\left(1 + \frac{l}{2r}\right)^{-3} - \left(1 - \frac{l}{2r}\right)^{-3}\right]$$

$$\fallingdotseq -\frac{3ql^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}$$

を得る。

第3章

3.1

電場は原点Oのまわりに球対称に外向きに生じ,

$$E(r) = -\frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{rR}\right)\exp\left(-\frac{r}{R}\right)$$

と表される。

原点を中心とした半径 r と $r+\Delta r$ の球面に挟まれた球殻にガウスの法則を適用する。

$$E(r+\Delta r)\cdot 4\pi(r+\Delta r)^2 - E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}\cdot 4\pi r^2 \Delta r$$

ここで, $\Delta r \to 0$ とすると,

$$\text{左辺} = \Delta r \cdot \frac{d}{dr}\left[4\pi r^2 E(r)\right] = \frac{Q}{\varepsilon_0}\Delta r \cdot \frac{d}{dr}\left[\left(1+\frac{r}{R}\right)\exp\left(-\frac{r}{R}\right)\right]$$

$$= -\frac{Q}{\varepsilon_0 R^2} r \exp\left(-\frac{r}{R}\right)\cdot \Delta r$$

と計算できるから,

$$\underline{\rho(r) = -\frac{Q}{4\pi R^2}\frac{1}{r}\exp\left(-\frac{r}{R}\right)}$$

と求められる。

（参考） 電荷密度 $\rho(r)$ （$r \neq 0$）を全空間で積分すると,

$$\int_\varepsilon^\infty \rho(r)\cdot 4\pi r^2 dr = -\frac{Q}{R^2}\int_\varepsilon^\infty r\exp\left(-\frac{r}{R}\right)dr$$

$$= -\frac{Q}{R^2}\left\{\left[-Rr\exp\left(-\frac{r}{R}\right)\right]_\varepsilon^\infty + R\int_\varepsilon^\infty \exp\left(-\frac{r}{R}\right)dr\right\} \to -Q \quad (\varepsilon \to 0)$$

となり, 原点に置かれた点電荷 Q と合わせて, 全空間の電荷はゼロである。

3.2

(1)　点 A を中心に線分 AP の長さ r_1 を半径とした球面を考え，直線 AP を x 軸のまわりに回転したとき切り取られる球面の一部（図 3a の朱線部分）の面積 $S(\theta_1)$ を求める。図 3b のように，$S(\theta_1)$ は半径 $r_1 \sin\theta$，幅 $r_1 d\theta$ の円環の面積の和として表される。したがって，

$$S(\theta_1) = \int_0^{\theta_1} 2\pi r_1 \sin\theta \cdot r_1 d\theta = 2\pi r_1^2 \left[-\cos\theta\right]_0^{\theta_1} = 2\pi r_1^2 (1-\cos\theta_1)$$

これより立体角

$$\Omega_1 = \frac{S(\theta_1)}{r_1^2} = 2\pi(1-\cos\theta_1)$$

を得る。

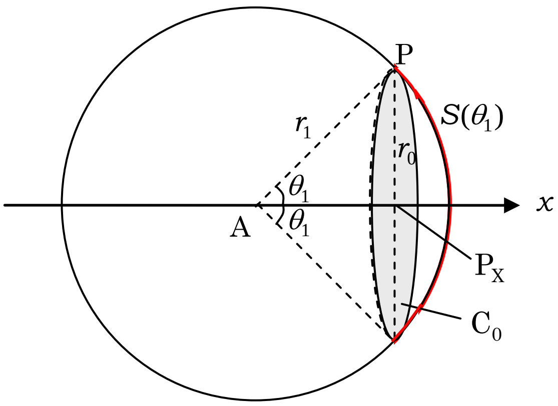

図 3a　直線 AP を回転するとき，
切り取られる断面

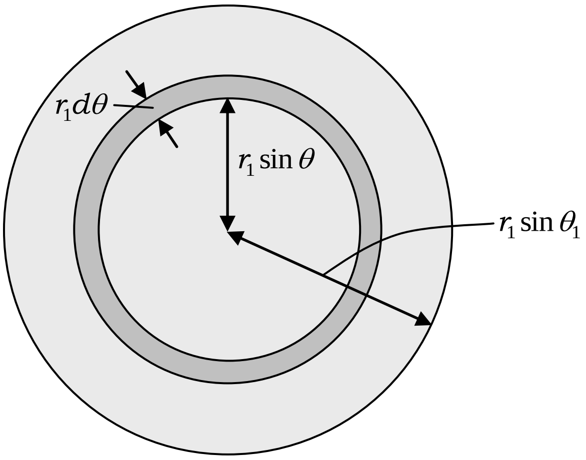

図 3b 切り取られた球面の一部の面積

(2) 点電荷 q_1 から出る電気力線の数は，q_1/ε_0 であり，それは，点 A を中心に球対称に放射状に広がる。したがって，(3.10)式より，円盤 C_0 を貫く電気力線の数は,

$$N_1 = \frac{q_1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{2\pi(1-\cos\theta_1)}{4\pi} = \frac{q_1(1-\cos\theta_1)}{2\varepsilon_0} \qquad (3a)$$

となる。ここで，全方位の立体角が 4π であることを用いた。これより，回転体を貫く電気力線の数

$$\frac{q_1(1-\cos\theta_1)}{2\varepsilon_0} + \frac{q_2(1-\cos\theta_2)}{2\varepsilon_0}$$

が一定であることを用いると,

$$\underline{q_1\cos\theta_1 + q_2\cos\theta_2 = q_1\cos\theta_{10} + q_2\cos\theta_{20}} \qquad (3b)$$

となる。これが，求める電気力線の方程式である。

(3) 求める電気力線の，点電荷 q と $-q/2$ のすぐ近くの点を考える。$q_1 = q$，$q_2 = -q/2$ とし，q のすぐ近くの点に対して $\theta_1 = \theta$，$\theta_2 = \pi$，および，$-q/2$ のすぐ近くの点に対して $\theta_{10} = 0$，$\theta_{20} = \pi/2$ となるから，これらを(3b)式に代入して,

$$q\cos\theta - \frac{q}{2}\cos\pi = q\cos 0 - \frac{q}{2}\cos\frac{\pi}{2}$$

これより，

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \theta = \underline{\frac{\pi}{3}}$$

を得る。

（別解）

図 3.17 において，点電荷 q から x 軸と角 θ をなして出た電気力線が点電荷 $-q/2$ に，x 軸と垂直な方向から入るとする。このとき，θ より小さな角をなして q を出た電気力線は，すべて $-q/2$ に $\pi/2$ より大きな角で入り，その数は，$\dfrac{q}{2\varepsilon_0}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{q}{4\varepsilon_0}$ である。一方，点電荷 q のすぐ近くでは，電気力線は放射状に出るから，角 θ より小さな角をなして q を出る電気力線の数は，(3a)式で $q_1 \to q$，$\theta_1 \to \theta$ として，$\dfrac{q(1-\cos\theta)}{2\varepsilon_0}$ と書けるから，

$$\frac{q(1-\cos\theta)}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{4\varepsilon_0} \quad \therefore \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$$

を得る。

第 4 章

4.1

海水表面に，単位面積あたり上向きに作用する力 f は，電荷面密度を σ として(4.2)式より，

$$f = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

である。この力は，$h = 0.1\ \mathrm{cm} = 10^{-3}\ \mathrm{m}$ だけ持ち上げられた海水に，単位面積あたり作用する重力とつり合っている。したがって，

$$\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \rho g h \quad \therefore \quad \sigma = \sqrt{2\varepsilon_0 \rho g h} = \underline{1.32\times10^{-5}\ \mathrm{C/m^2}}$$

となり，海面近くの電場の強さ E は，(4.1)式より，

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \underline{1.5\times10^6\ \mathrm{V/m}}$$

となる。

（参考）

晴れた日の海面近くの電場は, 150 V/m 程度であることが知られている。

4.2

十分に遠く離れた導体球 1 と 2 の電気容量は，(4.5)式よりそれぞれ,

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 r_1, \quad C_2 = 4\pi\varepsilon_0 r_2$$

と書ける。したがって，はじめにそれぞれの導体球に蓄えられた電気量はそれぞれ,

$$Q_1 = C_1\phi_1 = 4\pi\varepsilon_0 r_1\phi_1, \quad Q_2 = C_2\phi_2 = 4\pi\varepsilon_0 r_2\phi_2$$

となる。これらを導線でつなぐと 2 つの導体球の電位は等しくなる。また，導線に分布する電荷は無視でき，導体球は十分離れているから， 2 つの導体球に溜まる電荷は，その電位を ϕ としてそれぞれ $C_1\phi$, $C_2\phi$ となり，

$$\phi = \frac{Q_1+Q_2}{C_1+C_2} = \underline{\frac{r_1\phi_1+r_2\phi_2}{r_1+r_2}}$$

と求められる。

このとき，導体球 1 の電荷の減少量 $\varDelta Q$ が導線を移動した電荷の総量であり，

$$\varDelta Q = C_1(\phi_1-\phi) = \underline{\frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}{r_1+r_2}(\phi_1-\phi_2)}$$

を得る。

第 5 章

5.1

(1)　例題 5.2 で示したように，原点を O とした直交座標系 $x-y-z$ をとると，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ より，$\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r}$ となる。これより，

$$\frac{\partial\phi(r)}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{x}{r}\frac{d\phi(r)}{dr}$$

$$\frac{\partial^2\phi(r)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{r}\frac{d\phi(r)}{dr}\right]=\frac{1}{r}\frac{d\phi(r)}{dr}+x\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{r}\frac{d\phi(r)}{dr}\right]$$

ここで,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{r}\frac{d\phi(r)}{dr}\right]=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{d\phi(r)}{dr}+\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{d^2\phi(r)}{dr^2}=-\frac{x}{r^3}\frac{d\phi(r)}{dr}+\frac{x}{r^2}\frac{d^2\phi(r)}{dr^2}$$

と計算できるから,

$$\frac{\partial^2\phi(r)}{\partial x^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}\frac{d\phi(r)}{dr}+\frac{x^2}{r^2}\frac{d^2\phi(r)}{dr^2}$$

となる。同様に,

$$\frac{\partial^2\phi(r)}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3}\frac{d\phi(r)}{dr}+\frac{y^2}{r^2}\frac{d^2\phi(r)}{dr^2},\quad \frac{\partial^2\phi(r)}{\partial z^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3}\frac{d\phi(r)}{dr}+\frac{z^2}{r^2}\frac{d^2\phi(r)}{dr^2}$$

となるから,

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi(r)&=\frac{3r^2-(x^2+y^2+z^2)}{r^3}\frac{d\phi(r)}{dr}+\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\frac{d^2\phi(r)}{dr^2}\\&=\frac{2}{r}\frac{d\phi(r)}{dr}+\frac{d^2\phi(r)}{dr^2}=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\phi(r)+r\frac{d\phi(r)}{dr}\right]=\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left[r\phi(r)\right]\end{aligned}$$

を得る。これより，ポアソン方程式は,

$r>R$のとき, $\underline{\dfrac{1}{r}\dfrac{d^2}{dr^2}\left[r\phi(r)\right]=0}$ (5a)

$r\leqq R$のとき, $\underline{\dfrac{1}{r}\dfrac{d^2}{dr^2}\left[r\phi(r)\right]=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}$ (5b)

となる。

(2) $r>R$のとき, $\dfrac{d^2}{dr^2}\left[r\phi(r)\right]=0$を２回積分して,

$$r\phi(r)=c_1+c_2r\quad\therefore\quad \phi(r)=c_2+\frac{c_1}{r}$$ （c_1, c_2は積分定数）

となる。ここで，「$r\to\infty$のとき, $\phi(r)\to 0$」より, $c_2=0$を得る。

$r\leqq R$のとき, $\dfrac{1}{r}\dfrac{d^2}{dr^2}\left[r\phi(r)\right]=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$より, c_3, c_4を積分定数として,

$$r\phi(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^3 + c_3 r + c_4 \quad \therefore \quad \phi(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 + c_3 + \frac{c_4}{r}$$

となる。ここで，有限な密度で電荷が分布している点（点電荷が存在しない点）では，電位は発散せず連続的になめらかに変化する。したがって $r = 0$ で電位は連続であり発散しないことから，$c_4 = 0$ でなければならない。また，$r = R$ で電位が連続でなめらか（1 階の導関数が連続）という条件から，

$$\frac{c_1}{R} = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 + c_3, \quad -\frac{c_1}{R^2} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}R$$

が成り立つ。これより，

$$c_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}R^3, \quad c_3 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}R^2$$

を得る。こうして，

$$r > R \text{ のとき，} \quad \phi(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$r \leqq R \text{ のとき，} \quad \phi(r) = \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

となり，$E(r) = -\dfrac{\partial \phi}{\partial r}$ より，例題 3.4 の結果を得ることができる。

5.2

導体球殻の電位がゼロとなることから，5.3 節で調べた鏡像法を用いることができる。点電荷 q は中心 O に関して左右対称であるから，鏡像点および鏡像電荷も左右対称になる（図 5a）。

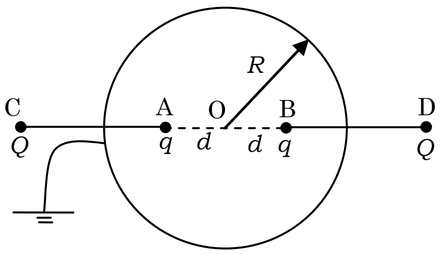

図 5a

点 A の電荷 q の鏡像点を C，点 B の鏡像点を D とし，AC=BD=l とす

る。このとき，鏡像電荷Qは，(5.24)式より，$Q=-\frac{l+d}{R}q$である。また，(5.25)式より，$d=\frac{R^2}{l+d}$なので，距離lは，$l=\frac{R^2}{d}-d$となる。

点 A の点電荷にはたらく力fは，点 C, B, D の点電荷からはたらく力の合力に等しい。したがって，その力fの向きは B→A であり，大きさは,

$$f=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(2d)^2}-\frac{Q}{l^2}+\frac{Q}{(2d+l)^2}\right]=\underline{\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{4d^2}+\frac{4d^3R^3}{(R^4-d^4)^2}\right]}$$

となる。点 B の点電荷にはたらく力は, fと同じ大きさで逆向である。

第 6 章

6.1

鏡像法を用いる。導体球 A の電位をϕ，導体平板 P の電位をゼロとすると，物質中の電場は P を取り去って A と対称な点に A と同じ導体球 B をおいて電位を$-\phi$としたときにできる電場と同じである。オームの法則(6.7)式より導体球 A と平板 P の間の物質に流れる電流は, 導体球 AB 間に流れる電流と同じである。したがって，例題 6.7 と同様に，AB 間すなわち AP 間の電流の強さIは，(6.17)式で$\phi_A\to\phi$として，

$$I=\underline{4\pi\sigma a\phi}$$

となる。電気抵抗Rは,

$$R=\frac{\phi}{I}=\underline{\frac{1}{4\pi\sigma a}}$$

となる。この抵抗は，導体球 AB 間の抵抗の 1/2 であり，例題 6.7 の結果で$b\to a$として 1/2 倍したものに等しい。

6.2

2 つの電極導体 A, B に，中心軸に沿って単位長さあたりそれぞれ電荷$\pm Q$を与える。物質の誘電率をεとすると，中心軸から距離rの点の電場の強さは，$E(r)=\frac{Q}{2\pi\varepsilon r}$となるから，A, B 間の電位差は,

$$\phi = \int_a^b E(r)\,dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a} \tag{6a}$$

となる。電流密度を $j(r)$ とすると，A から B に流れる単位長さあたりの電流は， $j(r) = \sigma E(r)$ を用いて，

$$I = 2\pi r j(r) = 2\pi\sigma r E(r) = \frac{\sigma Q}{\varepsilon} \tag{6b}$$

と表される。 $d\phi = Edr$ と書けるから，求める消費電力は，

$$P = \int dP = \int_a^b I \cdot E(r)\,dr = \int_a^b \frac{\sigma Q^2}{2\pi\varepsilon^2}\frac{dr}{r} = \frac{\sigma Q^2}{2\pi\varepsilon^2}\ln\frac{b}{a}$$

$$= \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon^2}\left(\frac{2\pi\varepsilon\phi}{\ln(b/a)}\right)^2 \ln\frac{b}{a} = \underline{\frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}\phi^2}$$

となる。ここで，(6a)式を用いた。

（別解）

(6a), (6b)式より，積分をせずに，

$$P = I\phi = \frac{\sigma Q^2}{2\pi\varepsilon^2}\ln\frac{b}{a} = \underline{\frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}\phi^2}$$

などとしてもよい。

第 7 章

7.1

円電流上で, 点 O を中心に x 軸方向から反時計回りに角 θ の点を P とする。点 P での電流素片 $I_2 ds = I_2 \cdot ad\theta$ が直線電流から受ける力を考える。

直線電流により点 P に生じる磁場は，図の表から裏の向きに大きさ

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d + a\cos\theta)}$$

となる。この磁場から電流素片が受ける力の向きは中心 O に向かう向きで, 大きさは,

$$dF = I_2 B ds = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi(d + a\cos\theta)}d\theta$$

となる。この力の x, y 成分は，$(dF_x, dF_y) = (-dF\cos\theta, -dF\sin\theta)$ と書ける。y 成分は θ の奇関数であるから円周の和はゼロとなる。一方，x 成分は，

$$F_x = -\int dF\cos\theta = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a\cos\theta}{d+a\cos\theta}d\theta$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{d}{d+a\cos\theta}\right)d\theta$$

ここで，$\tan\dfrac{\theta}{2} = t$ とおくと，

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2}\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{2\cos^2\theta/2} = \frac{1+t^2}{2}$$

より，

$$\int_0^{\pi}\frac{d}{d+a\cos\theta}d\theta = \int_0^{\infty}\frac{2d/(1+t^2)}{d+a(1-t^2)/(1+t^2)}dt$$

$$= \frac{2d}{d-a}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+(d+a)/(d-a)}$$

$$= \frac{2d}{\sqrt{d^2-a^2}}\left[\tan^{-1}\sqrt{\frac{d-a}{d+a}}t\right]_0^{\infty} = \frac{\pi d}{\sqrt{d^2-a^2}}$$

となり，

$$F_x = \underline{\mu_0 I_1 I_2\left(\frac{d}{\sqrt{d^2-a^2}}-1\right)}$$

を得る。ここで，$F_x > 0$ となるから，力の向きは，<u>x軸正の向き</u>である。

7.2

(1)　図 7a のように，電流素片 $I_1 d\boldsymbol{s}_1$ から $I_2 d\boldsymbol{s}_2$ へ至るベクトルを $\boldsymbol{r}$

（$|\boldsymbol{r}| = r$ ）とすると，$I_1 d\boldsymbol{s}_1$ が $I_2 d\boldsymbol{s}_2$ の位置につくる磁場は，ビオ－サバールの法則(7.8)より，

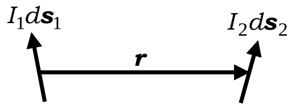

図 7a

$$d\boldsymbol{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 d\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

となる。したがって，$I_2 d\boldsymbol{s}_2$ がこの磁場から受ける力は，

$$d\boldsymbol{F}_{21} = I_2 d\boldsymbol{s}_2 \times d\boldsymbol{B}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\frac{d\boldsymbol{s}_2 \times (d\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{r})}{r^3}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\frac{d\boldsymbol{s}_1(d\boldsymbol{s}_2 \cdot \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}(d\boldsymbol{s}_1 \cdot d\boldsymbol{s}_2)}{r^3} \qquad (7a)$$

ここで，付録の(A.11)式を用いた。

また，$I_2 d\boldsymbol{s}_2$ が $I_1 d\boldsymbol{s}_1$ の位置につくる磁場は，

$$d\boldsymbol{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2 d\boldsymbol{s}_2 \times (-\boldsymbol{r})}{r^3}$$

となるから，$I_1 d\boldsymbol{s}_1$ が $I_2 d\boldsymbol{s}_2$ から受ける力は，

$$d\boldsymbol{F}_{12} = I_1 d\boldsymbol{s}_1 \times d\boldsymbol{B}_1 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\frac{d\boldsymbol{s}_2(d\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}(d\boldsymbol{s}_1 \cdot d\boldsymbol{s}_2)}{r^3} \qquad (7b)$$

となる。(7a)，(7b)式より，

$$d\boldsymbol{F}_{21} + d\boldsymbol{F}_{12} = = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\frac{d\boldsymbol{s}_1(d\boldsymbol{s}_2 \cdot \boldsymbol{r}) - d\boldsymbol{s}_2(d\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{r})}{r^3} \qquad (7c)$$

となる。(7c)式右辺の分子は，$d\boldsymbol{s}_1$ と $d\boldsymbol{s}_2$ が平行であればゼロになり，$d\boldsymbol{F}_{21} = -d\boldsymbol{F}_{12}$ となる。これは，「作用と反作用が同じ大きさで逆向きである」という作用・反作用の法則が成り立つが，平行でなければ，(7c)式はゼロとならず，作用・反作用の法則は成り立たない。こうして，電流素片の間には，平行でない限り，作用・反作用の法則は成立しないことがわかる。

(2) 図 7b のように，閉回路 C_1 に流れる電流が C_2 に流れる電流全体に及ぼす力 $\boldsymbol{F}_{21}$ は，$d\boldsymbol{F}_{21}$ を C_1, C_2 について線積分を用いて，

$$\boldsymbol{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\left[\oint_{\mathrm{C}_1} d\boldsymbol{s}_1 \oint_{\mathrm{C}_2} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot d\boldsymbol{s}_2 - \oint_{\mathrm{C}_1}\oint_{\mathrm{C}_2} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} d\boldsymbol{s}_1 \cdot d\boldsymbol{s}_2\right] \tag{7d}$$

と書ける。また，C_2 が C_1 に及ぼす力 $\boldsymbol{F}_{12}$ は，

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\left[\oint_{\mathrm{C}_2} d\boldsymbol{s}_2 \oint_{\mathrm{C}_1} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot d\boldsymbol{s}_1 - \oint_{\mathrm{C}_1}\oint_{\mathrm{C}_2} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} d\boldsymbol{s}_1 \cdot d\boldsymbol{s}_2\right] \tag{7e}$$

と書ける。

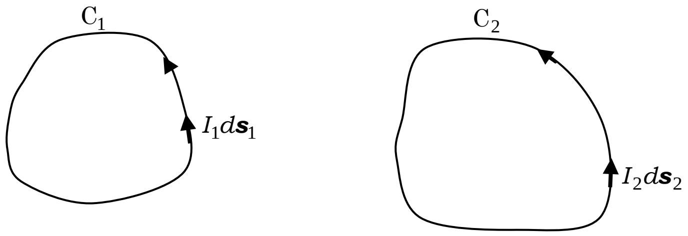

図 7b

いま，$\boldsymbol{r}/r^3$ は，保存力場である点電荷による静電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \propto \boldsymbol{r}/r^3$ と同じ形であり，閉回路の線積分はゼロである（5.2.1 節，および，下記の（参考）参照）。よって，(7d), (7e)式右辺第 1 項は共にゼロである。(7d), (7e)式右辺第 2 項は，符号が異なるだけであるからそれらの和はゼロである。こうして，

$$\boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{12} = 0$$

となり，作用・反作用の法則の成立することがわかる。

(参考)

線積分がゼロになることを計算で示す。

(7d)式右辺の第 1 項の C_2 に関する線積分にストークスの定理を用いる。

$$\oint_{\mathrm{C}_2} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot d\boldsymbol{s}_2 = \int_{\mathrm{S}_2} \mathrm{rot}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)\cdot d\boldsymbol{S}_2$$

ここで，S_2 は閉回路 C_2 で囲まれた面である。

C_1 上の点を (x_1, y_1, z_1)，C_2 上の点を (x_2, y_2, z_2) とすると，

$$\boldsymbol{r} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

と書けることを用いて，$\mathrm{rot}(\boldsymbol{r}/r^3)$ を S₂ 上で計算する。x 成分は，

$$\left[\mathrm{rot}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)\right]_x=\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{z_2-z_1}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{y_2-y_1}{r^3}\right)$$

$$=(z_2-z_1)\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^3}\right)\frac{\partial r}{\partial y_2}-(y_2-y_1)\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^3}\right)\frac{\partial r}{\partial z_2}$$

ここで，$\dfrac{\partial r}{\partial y_2}=\dfrac{y_2-y_1}{r}$，$\dfrac{\partial r}{\partial z_2}=\dfrac{z_2-z_1}{r}$（例題 5.2 参照）を用いると，

$$\left[\mathrm{rot}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)\right]_x=-\frac{3}{r^4}\left[\frac{(z_2-z_1)(y_2-y_1)}{r}-\frac{(y_2-y_1)(z_2-z_1)}{r}\right]=0$$

となる。y 成分，z 成分も同様にゼロとなる。よって，

$$\oint_{\mathrm{C}_2}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot d\boldsymbol{s}_2=0$$

であることがわかる。

同様に，$\oint_{\mathrm{C}_1}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot d\boldsymbol{s}_1=0$ となる。

7.3

一般に，位置エネルギー $U(\boldsymbol{r})$ と力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ の関係は，電場と電位の関係(2.10)と同様に，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=-\mathrm{grad}\,U(\boldsymbol{r})$$

で与えられる。したがって磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ の中にある磁気モーメント $\boldsymbol{m}$ の磁気双極子にはたらく力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ は，(7.23)式より，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=\mathrm{grad}(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B})=\mathrm{grad}(m_xB_x+m_yB_y+m_zB_z)$$

と書ける。ここで，磁気モーメント $\boldsymbol{m}=(m_x,m_y,m_z)$ は一定値であるか

ら力の x 成分は，

$$F_x(\boldsymbol{r}) = m_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + m_y \frac{\partial B_y}{\partial x} + m_z \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

となる。電流の流れていない真空中では，

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \mathbf{0}$$

であるから，$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial y}$，$\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial z}$ より，

$$F_x(\boldsymbol{r}) = m_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + m_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + m_z \frac{\partial B_x}{\partial z}$$

となる。同様に，力の y, z 成分はそれぞれ，

$$F_y(\boldsymbol{r}) = m_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + m_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + m_z \frac{\partial B_y}{\partial z},$$

$$F_z(\boldsymbol{r}) = m_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + m_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + m_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

となることから，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \underline{m_x \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x} + m_y \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y} + m_z \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z}}$$

を得る。

第 8 章

8.1

空洞内の電場 $\boldsymbol{E}_1$ は，誘電体内の電場 $\boldsymbol{E}$ と，分極によって作られる電場 $\boldsymbol{E}_2$ の和で与えられる。

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_2 \qquad (8a)$$

空洞の中心 O から分極 $\boldsymbol{P}$ と角 θ をなす方向の空洞内面の点Aに現れる分極電荷の面密度 σ_{P} は，$P = |\boldsymbol{P}|$ として，

$$\sigma_{\mathrm{P}} = -P\cos\theta$$

と表される（図 8a）。この分極電荷によ

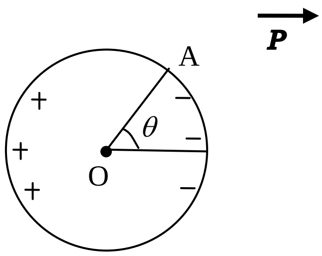

図 8a

る空洞内電場$\boldsymbol{E}_2$は，表面にσ_P　の分極電荷密度をもつ誘電体球内部の電場に等しいから，例題 8.2 より，電場の向きを考慮して，

$$\boldsymbol{E}_2 = \frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0}$$

と表される。よって，求める電場は，(8a)式より，

$$\underline{\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0}}$$

となる。

8.2

磁性体 I 側と II 側の磁束密度の大きさをそれぞれB_1, B_2，磁場の強さをそれぞれH_1, H_2とする。

磁荷が存在しない限り磁性体中でも，磁場に関するガウスの法則は，真空中の場合と同様に，(7.21)，(7.22)式がそのまま成り立つ。したがって，磁束線は連続であり，生成・消滅せず，境界面 S へ入射する磁束線の数と S から出射する数は等しい。したがって，境界面の微小面積dSを考えて（dSは微小なので，この面を平面と見なすことができる），

$$B_1 \cdot dS \cos\theta_1 = B_2 \cdot dS \cos\theta_2$$

$$\therefore \quad B_1 \cos\theta_1 = B_2 \cos\theta_2 \tag{8b}$$

が成り立つ。したがって，**境界面の両側で磁束密度$\boldsymbol{B}$の法線成分は等しい**。

図 8b のように，境界面を囲む長方形（境界面に平行な辺の長さはa，境界面に垂直な辺の長さはbで，bは十分小さい）の閉回路にアンペールの法則(8.23)を適用する（長さaも小さいとして，長さaの境界面は平面と見なされる）。bは十分小さいので，境界面に垂直な辺に沿った線積分は無視できる。そうすると，長方形に沿ったアンペールの法則は，真電流が流れていないかぎり，

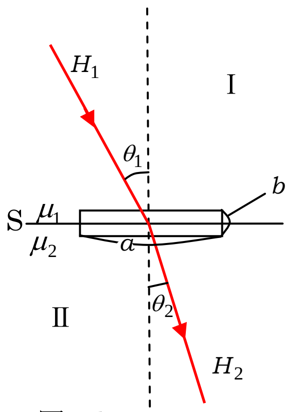

図 8b 磁場の屈折 2
$\mu_1 > \mu_2$ の場合

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = -H_1 a\sin\theta_1 + H_2 a\sin\theta_2 = 0$$

$$\therefore \quad H_1\sin\theta_1 = H_2\sin\theta_2 \tag{8c}$$

となる。したがって，**磁場の強さ $\boldsymbol{H}$ の接線成分は連続**である。ここで，$B_1 = \mu_1 H_1$， $B_2 = \mu_2 H_2$ であるから，(8b)式と(8c)式の両辺を辺々割り算して，

$$\underline{\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}}$$

を得る。

Note 1　$\mu_1 < \mu_2$ のとき，(8b)式は $\mu_1 H_1\cos\theta_1 = \mu_2 H_2\cos\theta_2$ と書けるから，$H_1\cos\theta_1 > H_2\cos\theta_2$ となり，**境界面で磁場の強さ $\boldsymbol{H}$ の法線成分は不連続**である。

Note 2　$\mu_1 < \mu_2$ のとき，(8c)式より $B_1\sin\theta_1 < B_2\sin\theta_2$ となり，境界面で**磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の接線成分は不連続**である。これは，磁性体 I， II の境界面両側の磁化の相違により，磁化電流が流れるためである。

8.3

磁性体中でのアンペールの法則(8.23)を用いればよい。

回路の対称性より，中央の脚を貫く磁束 Φ_0 は，左右の鉄心を A→B→C→D および A→F→E→D と貫く磁束 Φ_1 の２倍である。中央の鉄心と上下左右の鉄心中の磁場の強さを，それぞれ H_0, H_1 とすると，

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu} = \frac{\Phi_0}{\mu S_0},\quad H_1 = \frac{B_1}{\mu} = \frac{\Phi_1}{\mu S_1} = \frac{\Phi_0}{2\mu S_1}$$

と書ける。これらを閉回路 A→B→C→D に関するアンペールの法則

$$H_0 a + H_1(a+b) = NI$$

に代入して，

$$\frac{\Phi_0 a}{\mu S_0} + \frac{\Phi_0(a+b)}{2\mu S_1} = NI \quad \therefore \quad \Phi_0 = \underline{\frac{2\mu NIS_0S_1}{2aS_1 + (a+b)S_0}}$$

を得る。

第 9 章

9.1

磁束$\Phi(t)$の増加により円軌道 C 上に生じる誘導電場の大きさを$E(a, t)$とすると，電磁誘導の法則は，

$$-\frac{d\Phi(t)}{dt} = \oint_{\mathrm{C}} E(a, t)\,dl = 2\pi a \cdot E(a, t) \qquad \text{(9a)}$$

と表される。また，電子の円軌道に沿った方向および中心方向の運動方程式はそれぞれ，

$$m\frac{dv}{dt} = -eE(a, t) \qquad \text{(9b)} \qquad m\frac{v^2}{a} = evB(a, t) \qquad \text{(9c)}$$

となる。また，はじめ電子の速さをv_0，軌道上の磁場をB_0とすると，

$$m\frac{v_0^2}{a} = ev_0B_0 \qquad \text{(9d)}$$

が成り立つ。はじめ，円軌道を貫いている磁束をΦ_0として，(9a), (9b)式より$E(a, t)$を消去して，tで積分する。

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{e}{2\pi a}\frac{d\Phi(t)}{dt} \qquad \therefore \quad m(v - v_0) = \frac{e}{2\pi a}\left(\Phi(t) - \Phi_0\right)$$

(9c), (9d)式より，

$$m(v - v_0) = ea\left(B(a, t) - B_0\right)$$

となるから，$\Delta\Phi(t) = \Phi(t) - \Phi_0$，$\Delta B(a, t) = B(a, t) - B_0$より，

$$\underline{\Delta\Phi(t) = 2\pi a^2 \cdot \Delta B(a, t)}$$

が成り立つ。これより，図 9a のように円軌道上の磁場の増加$\Delta B(a, t)$は，内部の平均の磁場の増加$\overline{\Delta B(t)} = \Delta\Phi(t)/\pi a^2$の 1/2 に等しくなるように磁場を強めることが必要であることがわかる。

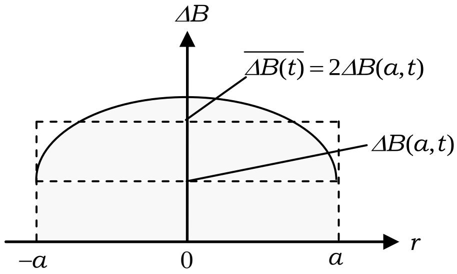

図 9a

9.2

(1)　S′ 系で直線状電荷は静止しているから，直線状電荷から距離 y の点 P にできる電場 E'_y は，ガウスの法則を用いて，

$$E'_y = \frac{\rho_0}{2\pi\varepsilon_0 y}$$

と書ける。S′ 系では点電荷 q は $-x$ 方向に速さ v で動いているが，直線電荷は静止しているから，点 P に磁場はできていない。そうすると，q に作用する力は電気力だけであり，

$$f'_y = qE'_y = \frac{\rho_0 q}{2\pi\varepsilon_0 y} \tag{9e}$$

となる。

S 系で静止している点電荷 q は，S′ 系で見れば速さ v で動いている。したがって，力の変換(9.15)において，S 系と S′ 系を逆にすればよく，S 系で見る点電荷 q に作用する力 f^{e}_y は，S′ 系ではたらく力 f'_y の $\gamma(v)$ 倍であり，$f^{\mathrm{e}}_y = \gamma(v) f'_y$ となる。すなわち，

$$f^{\mathrm{e}}_y = \gamma(v)\frac{\rho_0 q}{2\pi\varepsilon_0 y} \tag{9f}$$

と表される。

(2)　S 系で $+x$ 方向に速さ v で動いている点電荷 q は，S′ 系で静止してい

るから，S′系ではqに電気力だけが作用する。したがって，S′系ではqに作用する力f'_yは，(9e)式で与えられる。点電荷qはS′系で静止し，S系では速さvで動いているから，S系でqにはたらく力をf_yとすると，$f'_y = \gamma(v) f_y$となり，

$$f_y = \frac{1}{\gamma(v)} f'_y = \underline{\frac{1}{\gamma(v)} \frac{\rho_0 q}{2\pi\varepsilon_0 y}}$$

となる。

S系で，f_yと(9f)式で与えられるf_y^{e}との差は，電荷qが速さvで動いていることによってはたらく電磁気力，すなわち，磁場からはたらく磁気力に他ならない。磁気力f_y^{m}は，$c^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$を用いて，

$$f_y^{\mathrm{m}} = f_y - f_y^{\mathrm{e}} = \left[\frac{1}{\gamma(v)} - \gamma(v)\right] \frac{\rho_0 q}{2\pi\varepsilon_0 y} = -\mu_0 \gamma(v) \frac{\rho_0 q}{2\pi y} v^2$$

と書ける。さらに，S 系での電荷密度$\rho = \gamma(v)\rho_0$を用いると，電流は$I = \rho v$と書ける。また，磁場のz成分をB_zとすると，磁気力f_y^{m}はローレンツ力であり，$f_y^{\mathrm{m}} = -qvB_z$と表されるから，直線電流$I$による磁場$B_z$の表式

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \tag{7.5}$$

が導かれる。

9.3

図 9b のように，直線導線に強さIの電流を流したとき，円形導線を貫く磁束Φを求める。それには，円形導線内で直線から距離xと$x + dx$の間の領域を通る磁束を用いて積分計算をする。この領域の直線に沿った長さ

を $2y$ とすると,

$$y = \sqrt{a^2 - (a-x)^2} = \sqrt{x(2a-x)}$$

となる。直線導線から距離 x の点の磁束密度の大きさは $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$ であるから,

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2a}\frac{2\sqrt{x(2a-x)}}{x}dx = \frac{\mu_0 I}{\pi}\int_0^{2a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}}\,dx$$

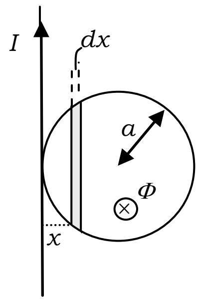

図 9b

ここで，与えられた積分公式より，

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{\pi}\left[\sqrt{x(2a-x)} + 2a\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{2a}}\right]_0^{2a} = \mu_0 a I$$

となり, (9.13)式より, 相互インダクタンス M は $M = \underline{\mu_0 a}$ と求められる。

第 10 章

10.1

このソレノイド・コイルの自己インダクタンスは，単位長さあたりの巻き数を $n = N/l$ とすると，$L = \mu_0 n^2 l S = \mu_0 N^2 S/l$ と書けるから，コイルに蓄えられるエネルギーは,

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{\mu_0 N^2 S}{2l}I^2$$

となる。

図 10a のように，電流 I を一定に保ったまま時間 dt の間にコイルを dl だけ引き延ばすと，コイルのエネルギーは,

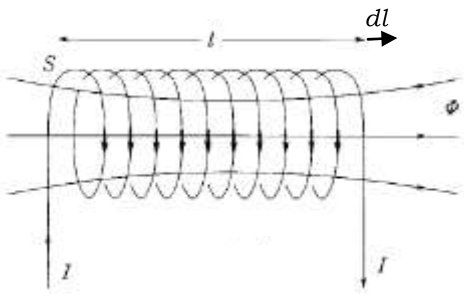

図 10a

$$dU = -\frac{\mu_0 N^2 I^2 S}{2l^2} dl$$

だけ変化する。このときコイルを貫く磁束 $\Phi = BS = \frac{\mu_0 NI}{l} S$ は，

$d\Phi = -\frac{\mu_0 NIS}{l^2} dl$ だけ変化し，コイルには電流の向きに $V = -N\frac{d\Phi}{dt}$ の誘電起電力が生じる。その結果，電流 I を流すために，

$$dW = VIdt = -NId\Phi = \frac{\mu_0 N^2 I^2 S}{l^2} dl$$

のエネルギーが使われる。コイルを引き延ばす向きに加える張力を F とすると，その仕事は Fdl であるから，エネルギー保存則 $Fdl = dU + dW$ より，

$$F = -\frac{\mu_0 N^2 I^2 S}{2l^2} + \frac{\mu_0 N^2 I^2 S}{l^2} = \underline{\frac{\mu_0 N^2 I^2 S}{2l^2}}$$

と求められる。ここで，$F > 0$ であるから，加える力は<u>引き延ばす向き</u>である。

（参考）

ソレノイド・コイルに電流を流すと，隣り合う電流間に引力がはたらき，その結果としてコイルは縮もうとする。そのため，この力を支えるために，引き延ばす向きに外力を作用させる必要がある。

10.2

電源の起電力を V とすると，回路１と２の回路方程式はそれぞれ，

$$L_1\frac{dI_1}{dt} + M\frac{dI_2}{dt} + R_1 I_1 = V \tag{10a}$$

$$L_2\frac{dI_2}{dt} + M\frac{dI_1}{dt} + R_2 I_2 = 0 \tag{10b}$$

となる。ここで，複素電圧 $\tilde{V}(t) = V_0 e^{i\omega t}$，複素電流 $\tilde{I}_1(t) = I_{10} e^{i(\omega t + \phi_1)}$，

$\tilde{I}_2(t) = I_{20} e^{i(\omega t + \phi_2)}$ を代入すると，

$$(R_1+i\omega L_1)\tilde{I}_1(t)+i\omega M\tilde{I}_2(t)=\tilde{V}(t),\quad i\omega M\tilde{I}_1(t)+(R_2+i\omega L_2)\tilde{I}_2(t)=0$$

となる。これを解くと，

$$\tilde{I}_1(t)=\frac{R_2+i\omega L_2}{(R_1+i\omega L_1)(R_2+i\omega L_2)+\omega^2M^2}\tilde{V}(t)$$

$$\tilde{I}_2(t)=\frac{-i\omega M}{(R_1+i\omega L_1)(R_2+i\omega L_2)+\omega^2M^2}\tilde{V}(t)$$

となるから，位相差を求めるためにこれらの比をとると，$\phi=\phi_2-\phi_1$ として，

$$\frac{I_{20}}{I_{10}}e^{i\phi}=\frac{\tilde{I}_2(t)}{\tilde{I}_1(t)}=-\frac{i\omega M}{R_2+i\omega L_2}=-\frac{\omega M}{R_2^2+\omega^2L_2^2}(\omega L_2+iR_2)=Ae^{i(\pi+\theta)}$$

となる。ここで，

$$A=\frac{\omega M}{\sqrt{R_2^2+\omega^2L_2^2}},\quad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{R_2}{\omega L_2}\right)$$

である。これより，位相差は，$\phi=\underline{\pi+\theta}$ と求められる。

第 11 章

11.1

(1)　z 軸方向に伝わる平面波を考えるので，場の量は，x, y 座標に依存しない。導体内を x 軸に沿って振動電流が流れるとき，電流密度を $j_x(z, t)$ とすると，オームの法則(6.7)は，

$$j_x(z, t)=\sigma E_x(z, t)$$

と書けるから，導体中には振動電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)=\left(E_x(z, t), 0, 0\right)$ が存在し，振動磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)=\left(0, B_y(z, t), 0\right)$ も現れる。こうして導体内に z 方向に伝わる平面波の電磁波が発生する。

このとき，電磁誘導の法則(9.4)式の y 成分およびマクスウェル - アンペールの法則(10.31)式の x 成分だけがゼロにならず，それぞれ，

$$\frac{\partial E_x(z, t)}{\partial z}+\frac{\partial B_y(z, t)}{\partial t}=0 \qquad (11a)$$

$$-\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial z}-\varepsilon\mu\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t}=\mu\sigma E_x(z,t) \tag{11b}$$

となる。ここで，(11a)式を z で微分し，(11b)式を t で微分して辺々加えると， $B_y(z,t)$ を消去することができ，

$$\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2}=\varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2}+\mu\sigma\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} \tag{11c}$$

が得られる。また，(11a)を t で微分し，(11b)式を z で微分して，もう一度(11a)式を用いると，(11c)と全く同形の式

$$\frac{\partial^2 B_y(z,t)}{\partial z^2}=\varepsilon\mu\frac{\partial^2 B_y(z,t)}{\partial t^2}+\mu\sigma\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial t} \tag{11d}$$

を得ることができる。

(11c)式の特殊解を求めるために，複素数を用いて，

$$\tilde{E}_x(z,t)=\tilde{E}(z)e^{i\omega t} \tag{11e}$$

とおいて代入すると，

$$\frac{d^2\tilde{E}(z)}{dz^2}=(-\varepsilon\mu\omega^2+i\mu\sigma\omega)\tilde{E}(z) \tag{11f}$$

となる。ここで，物理的に意味のある電場は，(11e)式の実数部分で与えられる。 $\tilde{E}(z)=E_0e^{-i\tilde{k}z}$ （ E_0 ：正の実数， $\tilde{k}$ ：複素数）とおいて(11f)式に代入すると，

$$\tilde{k}^2=\varepsilon\mu\omega^2-i\mu\sigma\omega \tag{11g}$$

となる。

（ｉ） $\omega \ll \sigma/\varepsilon$ のとき，(11g)式右辺の第１項は無視でき，

$$\tilde{k}^2\approx -i\mu\sigma\omega$$

となる。オイラーの公式(10.7)を用いると，

$$\tilde{k}^2 \approx -i\mu\sigma\omega = \mu\sigma\omega\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \mu\sigma\omega\, e^{-i\pi/2}$$

と書けるから，

$$\tilde{k} = \pm\sqrt{\mu\sigma\omega}\, e^{-i\pi/4} = \pm\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}(1-i)$$

を得る。ここで，$z \to \infty$ で電場が発散することはあり得ないから，正符号をとり，

$$\tilde{E}_x(z, t) = E_0 e^{-z/d} \cdot e^{-i(z/d-\omega t)}$$

を得る。ここで，$d = \sqrt{\dfrac{2}{\mu\sigma\omega}}$ である。実際の電場の振動は，実数部分をとって，

$$\underline{E_x(z, t) = E_0 e^{-z/d} \cos\left(\frac{z}{d} - \omega t\right)} \qquad (11h)$$

と表される。

磁場に対しても全く同様に，B_0 を正の実数として(11d)式から，

$$\underline{B_y(z, t) = B_0 e^{-z/d} \cos\left(\frac{z}{d} - \omega t\right)} \qquad (11i)$$

を得る。(11h)，(11i)式が導体内の電磁波の式である。

（ⅱ） $\omega >> \sigma/\varepsilon$ のとき，$\tilde{k}^2 \approx \varepsilon\mu\omega^2$ となるからり，$\tilde{k}$ は実数となる。その値を k とおき，正符号をとると，$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ となる。こうして，ほとんど減衰しない z 軸正方向への進行波

$$\underline{E_x(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t)}, \qquad \underline{B_y(z, t) = B_0 \cos(kz - \omega t)}$$

を得る。k として負号をとれば，z 軸負方向への進行波を与える。

(2) （ⅰ）の場合，電磁波の振幅が $1/e$ 倍に減衰する深さは，(11i)式より，

$\underline{d = \sqrt{\dfrac{2}{\mu\sigma\omega}}}$ で与えられる。

(3)　与えられた数値より，$\sigma/\varepsilon \approx 10^{19}\ \mathrm{s}^{-1}$ となる。一方，可視光の角振動数 $\omega = 2\pi c/\lambda$（λ：波長）は，$4\times10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$ 程度であるから，可視光に対し条件(ｉ) $\omega \ll \sigma/\varepsilon$ が成立することがわかる。

可視光が導体に侵入する深さは,

$$d = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \approx \underline{10^{-9}\ \mathrm{m}}$$

となり，ほとんど侵入しないことがわかる。

付録

A.1

(1)　$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$，$\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$，$\boldsymbol{C} = (C_x, C_y, C_z)$ とする。

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} = (B_yC_z - B_zC_y,\ B_zC_x - B_xC_z,\ B_xC_y - B_yC_x)$$

より，左辺の x 成分は,

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]_x &= A_y(B_xC_y - B_yC_x) - A_z(B_zC_x - B_xC_z) \\
&= B_x(C_yA_y + C_zA_z) - C_x(A_yB_y + A_zB_z) \\
&= B_x(C_xA_x + C_yA_y + C_zA_z) - C_x(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) \\
&= [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})]_x
\end{aligned}$$

となる。同様に,

$$[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]_y = [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})]_y$$

$$[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]_z = [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})]_z$$

となるから，(A.11)式が成り立つことがわかる。

(2)　(A.11)式で，$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{B}\to\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{C}\to\boldsymbol{A}$ として，

$$\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$$

$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{B}\to\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{C}\to\boldsymbol{B}$ として，

$$\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})$$

となるから，(A.11)式と上の 2 式を加えて(A.12)　式を得る。

A.2

(1)　図 1a のように，始点の固定された，単位長さのベクトル $\boldsymbol{e}$ の終点は，時間と共に始点を中心に半径 1 の円周上を動くので，終点の速度 $\dfrac{d\boldsymbol{e}}{dt}$ は円の接線方向を向き，$\boldsymbol{e}$ と $\dfrac{d\boldsymbol{e}}{dt}$ の内積はゼロとなる。

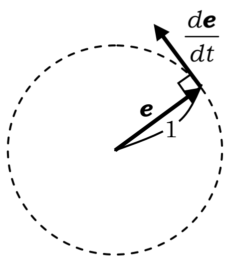

図 1a

(別解)

$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}=1$ の両辺を時間 t で微分すると，$\boldsymbol{e}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{e}}{dt}+\dfrac{d\boldsymbol{e}}{dt}\cdot\boldsymbol{e}=0$ となるが，

$\boldsymbol{e}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{e}}{dt}=\dfrac{d\boldsymbol{e}}{dt}\cdot\boldsymbol{e}$ より，(A.13)式を得る。

(2)　外積の定義より，$\boldsymbol{e}\times\dfrac{d\boldsymbol{e}}{dt}$ は $\boldsymbol{e}$ と $\dfrac{d\boldsymbol{e}}{dt}$ に垂直であるから，$\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{e}\times\dfrac{d\boldsymbol{e}}{dt}$ の内積，および，$\dfrac{d\boldsymbol{e}}{dt}$ と $\boldsymbol{e}\times\dfrac{d\boldsymbol{e}}{dt}$ の内積は共にゼロとなる。

A.3

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ より，gradϕ の x 成分は，

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{x}{r^3}$$

同様に，y 成分，z 成分は，それぞれ，$\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=-\dfrac{y}{r^3}$，$\dfrac{\partial\phi}{\partial z}=-\dfrac{z}{r^3}$ となる

から，

$$\mathrm{grad}\phi=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)=\left(-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3}\right)=\underline{-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}}$$

を得る。