

問題解答例

第 1 章

問題 1.1 残念ながら科学は、「なぜ」の質問には答えられない。量子の立場からはむしろ量子の世界の方が当たり前で、マクロの世界が不思議ともいえる。ミクロとマクロの境界は物質によって異なり、コヒーレンスが破れた状態がマクロの世界といえる。

問題 1.2 原理的に不可能。一方の人が測定して初めて、そのビットが 0 または 1 にランダムに決まり、その瞬間にもう一方のビット値も決まる。したがって、そのままでは情報は伝わらず、その結果を古典通信（光速以下の速さ）を通じて相手に伝えてはじめて情報が伝わったことになる。

第 2 章

問題 2.1 ユニタリ行列を \hat{U} とすると、 $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{I}$ が成り立つ。 $\hat{U}^\dagger \hat{U}$ の行列式は

$$\det(\hat{U}^\dagger \hat{U}) = (\det \hat{U}^\dagger)(\det \hat{U}) = (\det \hat{U})^*(\det \hat{U}) = |\det \hat{U}|^2 = 1 \quad (\text{a2.1})$$

となる。したがって、ユニタリ行列の行列式の絶対値は 1 である。

問題 2.2 (2.13) に左から $\langle \psi |$ をかけると次のようになる。

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = a \langle \psi | \psi \rangle = a \quad (\text{a2.2})$$

(2.13) の複素共役を取り、右から $|\psi\rangle$ をかけると、

$$\langle \psi | A^\dagger | \psi \rangle = a^* \langle \psi | \psi \rangle = a^* \quad (\text{a2.3})$$

となる。 $A = A^\dagger$ なので、(a2.2) と (a2.3) の左辺が等しい。したがって、 $a = a^*$ となり、 a は実数である。

問題 2.3 (2.12) に $\alpha = a + ib$, $\beta = d + ic$ を代入すると、(2.15) と一致する。

問題 2.4 SWAP ゲートを (2.42) に演算すると、次のように SWAP されることが示される。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \\ \alpha_1 \beta_2 \\ \beta_1 \alpha_2 \\ \beta_1 \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \\ \beta_1 \alpha_2 \\ \alpha_1 \beta_2 \\ \beta_1 \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \alpha_1 \\ \alpha_2 \beta_1 \\ \beta_2 \alpha_1 \\ \beta_2 \beta_1 \end{pmatrix} = |\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle \quad (\text{a2.4})$$

第 3 章

問題 3.1 図 a3.1 の通り。

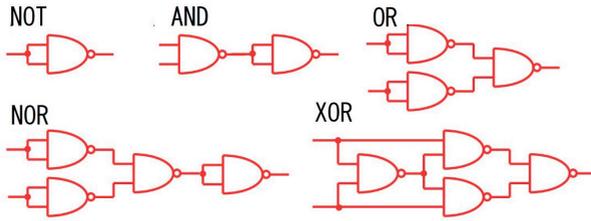


図 a3.1 NAND ゲートのみで NOT, AND, OR, NOR, XOR ゲートを作製

問題 3.2 N 個の都市のどこから始めてもよいので都市の巡り方の組み合わせの数は $(N-1)!$ となり、逆回りでもよいので 2 で割る。

第 4 章

問題 4.1 探したいデータが 2 個のときは平均値が 0 になってしまう。繰り返しても変化が無いので、グローバラーのアルゴリズムは破綻する。

探したいデータが 3 個のときは、そのままグローバラーのアルゴリズムを適用するとかえって状況が悪くなる。こういう場合は残りの 1 個を探すと、例題 4.3 のように 1 回で収束する。

問題 4.2 探すデータが 1 個のとき：各回の確率振幅の値（探しているデータと残りのデータ）だけを記す。1 回目： $\frac{11}{16}, \frac{3}{16}$ ，2 回目： $\frac{61}{64}, \frac{5}{64}$ ，3 回目： $\frac{251}{256}, -\frac{13}{256}$ ，4 回目： $\frac{781}{1024}, -\frac{171}{1024}$ 。すなわち、 $\frac{\pi\sqrt{2^4}}{4} \simeq 3$ の通り、3 回目に、探しているデータの確率振幅が最大となる。

探すデータが 4 個のとき：例題 4.3 と同様に 1 回で収束し、残りのデータの確率振幅の値は 0、探しているデータの確率振幅の値は $\frac{1}{2}$ となる。したがって、目的の 4 個のビット列をすべて求めるためには、アルゴリズムを 4 回以上繰り返す必要がある。（1 サイクルで 1 つの解しか得られないので。）

問題 4.3 $14^0 = 1, 14^1 = 14, 14^2 \pmod{15} = 1$ となるので、 $r = 2$ となる。 $14^{2/2} + 1 = 15, 14^{2/2} - 1 = 13$ となって 15 の素因数は求まらない。

問題 4.4 35 と素である x として、2 の場合を考える。 $2^j \pmod{35}, j = 0, 1, 2, \dots, 34$ を計算すると、1, 2, 4, 8, 16, 32, 29, 23, 11, 22, 9, 18 を繰り返す。すなわち、 $r = 12$ となる。 $2^{12/2} + 1 \pmod{35} = 30 = 5 \times 6, 2^{12/2} - 1 \pmod{35} = 28 = 7 \times 4$ より、5 と 7 が 35 の素因数として求まる。

第 5 章

問題 5.1 レーザー冷却は、ドップラー効果を利用した冷却法。すなわち、向かって来る原子（やイオン、以下「原子など」という）に励起レベルより少し低いエネルギーのレーザーを照射する。レーザー光を吸収した原子などは、励起状態から基底状態に戻るときに光を放出し、エネルギー差の分だけ原子などの運動エネルギーが下がる。これを繰り返して温度（運動エネルギー）を下げる。（レーザー冷却後、蒸発冷却でさらに温度を下げる。すなわち温度の高い原子などを放出して、低温の原子などを残す。）

問題 5.2 冷却原子自身はほぼ停止しているので $0.1 \mu\text{K}$ 以下の極低温（温度と運動エネルギーとは比例関係にある）ではあるが、真空容器の外の環境の温度は無関係（捕捉イオンも同様）。

問題 5.3 大気分子などがあると、捕捉イオンや冷却原子に衝突して量子ビットが失われてしまうから。

第 6 章

問題 6.1 まず $\text{Tr}\rho^2 \leq 1$ を示す。(6.3) を代入し、 $p_i \leq 1$, $p_i^2 \leq p_i$ より次式を得る。

$$\text{Tr}\rho^2 = \sum_{i,j} p_i p_j \text{Tr}(|\psi_i\rangle\langle\psi_i||\psi_j\rangle\langle\psi_j|) = \sum_{i,j} p_i p_j \delta_{ij} = \sum_i p_i^2 \leq 1 \quad (\text{a6.1})$$

等号が成り立つのは、ある i に対して $p_i = 1$ 、すなわち純粋状態のときだけ。よって混合状態では不等号となる。

問題 6.2 ヒントと (6.3) より、次のように $\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{A}) = \langle\hat{A}\rangle$ が示せる。

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{A}) &= \text{Tr}\left(\sum_{ij} p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| a_j |a_j\rangle\langle a_j|\right) = \sum_{ij} p_i a_j |\langle a_j|\psi_i\rangle|^2 \\ &= \sum_j a_j \left(\sum_i p_i P(\langle a_j|\psi_i\rangle)\right) = \sum_j a_j P(a_j) = \langle\hat{A}\rangle \end{aligned} \quad (\text{a6.2})$$

ここで、 $P(a_j)$ は測定値として a_j が得られる確率、 $P(\langle a_j|\psi_i\rangle) = |\langle a_j|\psi_i\rangle|^2$ は状態が $|\psi_i\rangle$ にあるときに測定値 a_j が得られる条件付き確率である。

問題 6.3 ヒントにより $\hat{\rho}$ は、次のように書ける。

$$\hat{\rho} = a_0 \hat{I} + a_1 \hat{\sigma}_x + a_2 \hat{\sigma}_y + a_3 \hat{\sigma}_z \quad (\text{a6.3})$$

密度行列とパウリ行列はエルミートなので、係数 a_i ($i = 0, 1, 2, 3$) は実数であることがすぐにわかる。 $\text{Tr}\hat{\rho} = 1$ より $a_0 = \frac{1}{2}$ が導ける。また $\text{Tr}\hat{\rho}^2 \leq 1$ より $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \leq \frac{1}{4}$ が得られる。よって $a_i = \frac{r_i}{2}$ ($i = 1, 2, 3$) とおけて (6.9) を得る。

問題 6.4 (6.7) と (6.9)、および $\hat{R}_z^\dagger(\theta) = \hat{R}_z(-\theta)$ より次式を得る。

$$\hat{R}_z(\theta)\hat{\rho}\hat{R}_z(-\theta) = \hat{R}_z(\theta)\frac{\hat{I} + \vec{r}\cdot\vec{\sigma}}{2}\hat{R}_z(-\theta) \quad (\text{a6.4})$$

$\hat{R}_z(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{I} - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\sigma}_z$ であり, $\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x = -\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z$ より以下を得る。

$$\begin{aligned}\hat{R}_z(\theta)\hat{\sigma}_x &= \hat{\sigma}_x\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{I} + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\sigma}_z\right) \\ &= \hat{\sigma}_x\left(\cos\left(\frac{-\theta}{2}\right)\hat{I} - i\sin\left(\frac{-\theta}{2}\right)\hat{\sigma}_z\right) = \hat{\sigma}_x\hat{R}_z(-\theta)\end{aligned}\quad (\text{a6.5})$$

同様に $\hat{R}_z(\theta)\hat{\sigma}_y = \hat{\sigma}_y\hat{R}_z(-\theta)$ となり, また $\hat{R}_z(\theta)\hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_z\hat{R}_z(\theta)$ なので次式を得る。

$$\begin{aligned}\hat{R}_z(\theta)\hat{\rho}\hat{R}_z(-\theta) &= \hat{R}_z(\theta)\frac{\hat{I} + r_x\hat{\sigma}_x + r_y\hat{\sigma}_y + r_z\hat{\sigma}_z}{2}\hat{R}_z(-\theta) \\ &= \frac{\hat{I}\hat{R}_z(\theta) + (r_x\hat{\sigma}_x + r_y\hat{\sigma}_y)\hat{R}_z(-\theta) + r_z\hat{\sigma}_z\hat{R}_z(\theta)}{2}\hat{R}_z(-\theta) \\ &= \frac{\hat{I} + (r_x\hat{\sigma}_x + r_y\hat{\sigma}_y)\hat{R}_z(-2\theta) + r_z\hat{\sigma}_z}{2}\end{aligned}\quad (\text{a6.6})$$

(a6.6) において次式が成り立つ。

$$\hat{\sigma}_x\hat{R}_z(-2\theta) = \hat{\sigma}_x(\cos\theta + i\sin\theta\hat{\sigma}_z) = \cos\theta\hat{\sigma}_x + \sin\theta\hat{\sigma}_y\quad (\text{a6.7})$$

同様に $\hat{\sigma}_y\hat{R}_z(-2\theta) = \cos\theta\hat{\sigma}_y - \sin\theta\hat{\sigma}_x$ なので次式を得る。

$$\hat{R}_z(\theta)\hat{\rho}\hat{R}_z(-\theta) = \frac{(r_x\cos\theta - r_y\sin\theta)\hat{\sigma}_x + (r_x\sin\theta + r_y\cos\theta)\hat{\sigma}_y + r_z\hat{\sigma}_z}{2}\quad (\text{a6.8})$$

回転後のプロットベクトル \mathbf{r}' は次のようになり, 通常のリフトと同じとなる^{*1}。

$$\mathbf{r}' = (r_x\cos\theta - r_y\sin\theta, r_x\sin\theta + r_y\cos\theta, r_z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}\quad (\text{a6.9})$$

問題 6.5 状態 $|\psi^{AR}\rangle\langle\psi^{AR}|$ について R のトレースを計算して, 次のように $\hat{\rho}^A$ を得る。

$$\begin{aligned}\text{Tr}_R(|\psi^{AR}\rangle\langle\psi^{AR}|) &= \sum_{j,k} \sqrt{p_j p_k} |j^A\rangle\langle k^A| \text{Tr}_R(|j^R\rangle\langle k^R|) = \sum_{j,k} \sqrt{p_j p_k} |j^A\rangle\langle k^A| \delta_{jk} \\ &= \sum_j \sqrt{p_j p_j} |j^A\rangle\langle j^A| = \hat{\rho}^A\end{aligned}\quad (\text{a6.10})$$

したがって (6.17) から (6.16) が導けた。

問題 6.6 $\hat{\mathcal{E}}(\hat{\rho}_{\text{in}})$ は密度演算子なので, トレースは 1 であることを使う。

$$1 = \text{Tr}(\hat{\mathcal{E}}(\hat{\rho}_{\text{in}})) = \text{Tr}\left(\sum_k \hat{K}_k \hat{\rho}_{\text{in}} \hat{K}_k^\dagger\right) = \text{Tr}\left(\sum_k \hat{K}_k^\dagger \hat{K}_k \hat{\rho}_{\text{in}}\right)\quad (\text{a6.11})$$

*1 <https://github.com/Michele-Minervini/nielsen-chuang-solutions> の exercize4.6 の答えより。

より $\sum_k \hat{K}_k^\dagger \hat{K}_k = \hat{I}$ が得られる。

問題 6.7 ヒントは、正しくは (6.3) (すなわち、 $\hat{\rho}_{\text{in}} = \sum_i p_i \hat{\rho}_i \equiv \sum_i p_i \text{diag}(q_i, 1 - q_i)$) を用いるべきである。

$$\hat{X} \hat{\rho}_i \hat{X} = \hat{Y} \hat{\rho}_i \hat{Y} = \text{diag}(1 - q_i, q_i), \hat{Z} \hat{\rho}_i \hat{Z} = \hat{\rho}_i \quad \text{より}$$

(6.34) の右辺 = $\sum_i p_i \frac{\hat{I}}{2} = \frac{\hat{I}}{2}$ となる。よって (6.34) が示せた。

問題 6.8 状態が純粋状態で、かつ重ね合わせ状態ではないとき。

問題 6.9 定義式 (6.54) と例題 6.3 などを参考にして、以下のように示せる。

$$\begin{aligned} F(\hat{X}, \mathcal{E}) &= \min_{|\psi\rangle} \sqrt{\langle \psi | \hat{X} \left((1-p) \hat{X} |\psi\rangle \langle \psi | \hat{X} + p \hat{Z} |\psi\rangle \langle \psi | \hat{Z} \right) \hat{X} | \psi \rangle} \\ &= \min_{|\psi\rangle} \sqrt{\langle \psi | \hat{X} \left((1-p) \hat{X} |\psi\rangle \langle \psi | \hat{X} \right) \hat{X} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{X} \left(p \hat{Z} |\psi\rangle \langle \psi | \hat{Z} \right) \hat{X} | \psi \rangle} \\ &= \min_{|\psi\rangle} \sqrt{(1-p) + p \langle \psi | \hat{Y} | \psi \rangle^2} = \sqrt{1-p} \end{aligned}$$

問題 6.10 $\hat{\mathcal{E}}(\hat{\rho}) = p\hat{\rho} + (1-p)\hat{Z}\hat{\rho}\hat{Z}$ において、演算要素の集まりは $\{\hat{K}_1 = \sqrt{p}\hat{I}, \hat{K}_2 = \sqrt{1-p}\hat{Z}\}$ となり、これらを (6.57) に代入して (6.61) を得る。

第 7 章

問題 7.1 (7.10) の左の不等式は、個々のエントロピーの平均情報量より結合エントロピーの平均情報量の方が大きいまたは等しいのは当然だから。また、右の不等式は、等号は X と Y が独立の時であり、独立でなければ $H(X, Y)$ の平均情報量は個々の平均情報量の和より減るので不等号となる。

問題 7.2 $H(X, Y)$ は、対 (X, Y) についての平均情報量である。 X が既知の場合である条件付きエントロピー $H(Y|X)$ は、既知情報量 $H(X)$ の分だけ対 (X, Y) の平均情報量 $H(X, Y)$ より小さくなっているべきである。したがって、 $H(Y|X) \equiv H(X, Y) - H(X)$ と定義できる。 X と Y を入れ替えた関係式も同様である。

問題 7.3 $-\log_2 x \geq \frac{1-x}{\log_e 2}$ で $x = \frac{Q(x_i)}{P(x_i)}$ とおいて次式を得る。

$$\begin{aligned} H(P||Q) &= -\sum_{i=1}^n P(x_i) \log_2 \frac{Q(x_i)}{P(x_i)} \geq \frac{1}{\log_e 2} \sum_{i=1}^n P(x_i) \left(1 - \frac{Q(x_i)}{P(x_i)} \right) \\ &= \frac{1}{\log_e 2} \sum_{i=1}^n (P(x_i) - Q(x_i)) = \frac{1}{\log_e 2} (1 - 1) = 0 \end{aligned} \quad (\text{a7.1})$$

問題 7.4 どの状態でも同じ答えになるので、例として $|\Phi^{(+)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B)$ を考える。 $\hat{\rho}^{AB} \equiv |\Phi^{(+)}\rangle \langle \Phi^{(+)}|$ なので

$$\hat{\rho}^A = \frac{1}{2} \text{Tr}_B(|00\rangle \langle 00| + |00\rangle \langle 11| + |11\rangle \langle 00| + |11\rangle \langle 11|) = \frac{1}{2}(|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|) = \frac{\hat{I}}{2} \quad (\text{a7.2})$$

となり、次のように求まる（付録 B の演算子関数など参照のこと）。

$$\begin{aligned} S(A) &= -\text{Tr}(\hat{\rho}^A \log_2 \hat{\rho}^A) = -\text{Tr}\left(\frac{\hat{I}}{2} \log_2 \frac{\hat{I}}{2}\right) = -\text{Tr}\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} \log_2 \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \log_2 \frac{1}{2} \end{array}\right) \\ &= -\text{Tr}\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} \end{array}\right) = -\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2 = 1 \end{aligned} \quad (\text{a7.3})$$

第 8 章

問題 8.1 付録 B.2.4 節参照。

問題 8.2 (8.32) を 1 と 4, 2 と 3 の組に書き直すと、次式を得る。

$$|\Psi^{(-)}\rangle_{1234} = |01\rangle_{14} \otimes |10\rangle_{23} - |00\rangle_{14} \otimes |11\rangle_{23} - |11\rangle_{14} \otimes |00\rangle_{23} + |10\rangle_{14} \otimes |01\rangle_{23} \quad (\text{a8.1})$$

この式に $|00\rangle = \frac{\Phi^{(+)} + \Phi^{(-)}}{\sqrt{2}}$ など ((2.53) 参照) を代入して (8.33) を得る。

問題 8.3 (8.33) において、ビット 1 と 4, 2 と 3 の組み合わせに (2.53) を代入して、ベル状態の積の和として整理して次式を得る。

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle &= \frac{\sin(2\theta)}{2} \left(|\Phi^{(+)}\rangle_{14} |\Phi^{(+)}\rangle_{23} - |\Phi^{(-)}\rangle_{14} |\Phi^{(-)}\rangle_{23} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(|\Psi^{(+)}\rangle_{14} |\Psi^{(+)}\rangle_{23} - |\Psi^{(-)}\rangle_{14} |\Psi^{(-)}\rangle_{23} \right) \\ &\quad + \frac{\cos(2\theta)}{2} \left(|\Psi^{(-)}\rangle_{14} |\Psi^{(+)}\rangle_{23} - |\Psi^{(+)}\rangle_{14} |\Psi^{(-)}\rangle_{23} \right) \end{aligned} \quad (\text{a8.2})$$

ベル状態測定の結果、ビット 2 と 3 が $|\Phi^{(\pm)}\rangle$ のとき、ビット 1 と 4 も $|\Phi^{(\pm)}\rangle$ となり、その確率は $\frac{\sin^2(2\theta)}{2}$ となることがわかる。ビット 2 と 3 が $|\Psi^{(\pm)}\rangle$ のときは、ビット 1 と 4 は $|\Psi^{(+)}\rangle$ と $|\Psi^{(-)}\rangle$ が混合した状態になる。

第 9 章

問題 9.1 (9.1) の左辺の \log_2 をとって、 $\sum_{i=1}^n p(a_i) = 1$ より次式を得る。

$$\begin{aligned} &\log_2 n! - \log_2((np(a_1))!) - \cdots - \log_2((np(a_n))!) \\ &\quad - (n \log_2 e) \times (1 - p(a_1) - \cdots - p(a_n)) \\ &\quad \simeq n \log_2 n - np(a_1) \log_2(np(a_1)) - \cdots - np(a_n) \log_2(np(a_n)) \\ &\quad = n \log_2 n - n \log_2 n \sum_{i=1}^n p(a_i) - n \left(\sum_{i=1}^n p(a_i) \log_2 p(a_i) \right) = nH(A) \end{aligned} \quad (\text{a9.1})$$

問題 9.2 $p = 1$ のときは 100% の確率でビットが反転するので、出力のビットをすべて反転すれば正しい復号ができるから。

問題 9.3 2つの異なる純粋状態 $|\psi_j\rangle$, ($j = 1, 2$) を, 等確率 $\frac{1}{2}$ で \mathcal{E} に送信すると仮定する。(9.39) に, 2つの状態 $\mathcal{E}(|\psi_j\rangle\langle\psi_j|)$ を代入し, 量子エントロピーの凹性を使って

$$C^{(1)}(\mathcal{E}) = S\left(\frac{\mathcal{E}(|\psi_1\rangle\langle\psi_1|) + \mathcal{E}(|\psi_2\rangle\langle\psi_2|)}{2}\right) - \frac{S(\mathcal{E}(|\psi_1\rangle\langle\psi_1|)) + S(\mathcal{E}(|\psi_2\rangle\langle\psi_2|))}{2} > 0 \quad (\text{a9.2})$$

が得られる。最後の不等号は2つの状態が異なるからである。 $|\psi_j\rangle$ を0と1に対応させれば古典情報が送信できる。

分極解消通信路では, $|\psi_j\rangle$ を $|0\rangle$ と $|1\rangle$ として, (6.33) より

$$\mathcal{E}(|0\rangle\langle 0|) = \frac{p}{2}\hat{I} + (1-p)|0\rangle\langle 0|, \quad \mathcal{E}(|1\rangle\langle 1|) = \frac{p}{2}\hat{I} + (1-p)|1\rangle\langle 1| \quad (\text{a9.3})$$

などとなり, この量子状態は $\frac{1\pm p}{2}$ の固有値をもつ。したがって

$$S(\mathcal{E}(|\psi_j\rangle\langle\psi_j|)) = H\left(\frac{1+p}{2}\right) \quad (\text{a9.4})$$

となり, $|\psi_j\rangle$ には依存しない。(9.39) の右辺第1項は (a9.3) を代入すると1となり, 以下を得る。

$$C^{(1)}(\mathcal{E}) = 1 - H\left(\frac{1+p}{2}\right) \quad (\text{a9.5})$$

第10章

問題 10.1 電子の電荷を e , 速さを v とすると, 電場 E によるクーロン力の強さは eE , 磁束密度 B によるローレンツ力の強さは evB となる。したがって, 以下が成り立ち, 磁場の影響は無視できる。

$$\frac{\text{磁束密度の影響}}{\text{電場の影響}} = \frac{\text{ローレンツ力の強さ}}{\text{クーロン力の強さ}} = \frac{evB}{eE} = \frac{v}{c} \ll 1 \quad (\text{a10.1})$$

問題 10.2 光子数 n の確率 $P(n)$ は (10.9) に $\langle n|$ を乗じ絶対値を2乗して次式を得る。

$$P(n) = \left| e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^j}{\sqrt{j!}} \langle n|j \rangle \right|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \quad (\text{a10.2})$$

(10.10) と比較して $|\alpha|^2 = \bar{n}$ となるので, α の絶対値の2乗は平均光子数である。

問題 10.3 $\bar{n} = 0.1$ として, $P(0) = e^{-0.1} \simeq 0.90484$, $P(1) = 0.1e^{-0.1} \simeq 0.09048$ より, 2個以上の確率 $P(\geq 2)$ は $P(\geq 2) = 1 - P(0) - P(1) \simeq 0.00468$ となる。したがって, 光子2個以上の確率は約0.5%となる。(1個の光子に対する割合は, $\frac{P(\geq 2)}{P(1)} \simeq 0.052$ より, 約5%となる。)

問題 10.4 コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ での \hat{x} と \hat{x}^2 の期待値を計算し、(10.4) を用いて

$$\begin{aligned}\langle \hat{x} \rangle &= \langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle = \frac{\alpha + \alpha^*}{2} \\ \langle \hat{x}^2 \rangle &= \langle \alpha | \hat{x}^2 | \alpha \rangle = \frac{\alpha^2 + 2\alpha\alpha^* + \alpha^{*2} + 1}{4}\end{aligned}\tag{a10.3}$$

となり、 $\Delta\hat{x}$ は次のように求まる。

$$\Delta\hat{x} = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2} = \frac{1}{2}\tag{a10.4}$$

同様に $\Delta\hat{p} = \frac{1}{2}$ が求まり、(10.16) を得る。

第 11 章

問題 11.1 復号の際に、共通鍵のビット列の各ビットが、0 のときは元のまま ($0+0=0$) であり、1 のときは $1\oplus 1=0$ だから平文に戻る。

問題 11.2 \otimes 基底で送られた状態は、 \oplus 基底では $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$ と表される。測定すると、それぞれ 50% の確率でランダムにビット 0 か 1 が観測される。

問題 11.3 答えは $\frac{2}{9}$ となる。アリスの 3 つの角度とボブの 3 つの角度の組み合わせは $3 \times 3 = 9$ であり、そのうち同じ角度の組み合わせは 2 個だから。

問題 11.4 イブが正しい基底を選ぶ確率は、 $\frac{1}{2}$ である。イブが誤った基底を選んだ場合には、ボブもアリスと異なった規定を選ぶ確率が $\frac{1}{2}$ なので、その場合にイブの盗聴が検知されない確率は $(\frac{1}{2})^2$ となる。したがって、イブの盗聴が検知されない確率は $\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$ となる。

第 12 章

問題 12.1 (12.6) で $\hat{A} = (1, 1)^T$ となり、 $\hat{I}_1 = 1$ なので、 \vec{G} は (12.2) となり、成り立っている。

問題 12.2 $\hat{H}\vec{e} = \vec{s}$ の式において、 \vec{e} の j 番目の行だけが 1 のときには、 \vec{s} は \hat{H} の j 番目の列となるから。

問題 12.3 問題ない。誤り訂正によって $-|111\rangle \rightarrow |111\rangle$ としただけなので、何番目のビットの位相 (符号) が反転したのかは関係ないから。

問題 12.4 $\hat{H}\hat{X}\hat{H} = \hat{Z}$ を示す。ほかも同様に示すことができる。

$$\begin{aligned}\hat{H}\hat{X}\hat{H} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \hat{Z}\end{aligned}\tag{a12.1}$$

問題 12.5 $\hat{T}\hat{X}\hat{T}^\dagger$ を計算すると、

$$\begin{aligned}
T X T^\dagger &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\pi/4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\pi/4} \\ e^{i\pi/4} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hat{X} + \hat{Y}}{\sqrt{2}} \tag{a12.2}
\end{aligned}$$

となる。同様に計算して以下を得る。

$$\hat{T} \hat{Y} \hat{T}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\pi/4} \\ ie^{i\pi/4} & 0 \end{pmatrix} = \frac{-\hat{X} + \hat{Y}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{T} \hat{Z} \hat{T}^\dagger = \hat{Z} \tag{a12.3}$$

問題 12.6 $\alpha_1|0_L\rangle + \alpha_0 \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)|1_L\rangle$ に $\hat{S}\hat{X}$ を適用すると次のようになり、位相が付くが $\hat{T}|\psi_L\rangle$ が得られる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \tag{a12.4}$$

第 13 章

問題 13.1 レーザー光を集光すると、輻射圧によりその集光点に原子を捕捉することができる。レーザー光の集光点などを移動させることにより、とらえた原子を自由に高速移動させることができる。

付録 A

問題 A.1 ヒントの通り、 a を b で割った余りを r とすると、 q を正の整数として $a = bq + r$ と書ける。 $r = 0$ のときは、明らかに b が最大公約数である。以後、 $r > 0$ のときを考える。

まず $\gcd(b, r) \geq \gcd(a, b)$ を証明する。 a と b は $\gcd(a, b)$ の倍数なので、 $r = a - bq$ も $\gcd(a, b)$ の倍数である。したがって $\gcd(a, b)$ は b と r の公約数である。最大公約数 $\gcd(b, r)$ は公約数の中で最大なので、 $\gcd(b, r) \geq \gcd(a, b)$ となる。

次に $\gcd(a, b) \geq \gcd(b, r)$ を証明する。 b と r は $\gcd(b, r)$ の倍数なので、 $a = bq + r$ も $\gcd(b, r)$ の倍数である。したがって $\gcd(b, r)$ は a と b の公約数である。最大公約数 $\gcd(a, b)$ は公約数の中で最大なので、 $\gcd(a, b) \geq \gcd(b, r)$ となる。

よって $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$ となり、ユークリッド法によって最大公約数が必ず求まる。

付録 B

問題 B.1 (B.14) は、 $e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{X}}$ などをテイラー展開し、 $\hat{X}^2 = \hat{Y}^2 = \hat{Z}^2 = \hat{I}$ と三角関数 \sin や \cos のテイラー展開を考慮すると得られる。

問題 B.2 省略（文献 [宮野] の図 3.5 参照）。

問題 B.3 (B.18) で $\eta = -1$, $2 \rightarrow 1$ とすれば, $|\psi_1 \psi_1\rangle = 0$ を得る。すなわち, 「1つの量子状態を, 2個以上の同種フェルミ粒子が占めることはできない」というパウリの排他原理が示された。

付録 C

問題 C.1 クラス P での決定性チューリング機械は, クラス BPP での確率的チューリング機械の一部である。また, BPP の確率的古典計算は, 量子並列性により計算する BQP の量子計算の一部であるといえる。したがって, $P \subseteq BPP \subseteq BQP$ であるといえる。

付録 D

問題 D.1 反転前の状態 $|p\rangle$ の係数を b_k , それ以外の状態の係数を a_k とする。(グローバルのアルゴリズムを k 回繰り返した後の係数の意味。) $|p\rangle$ の係数の反転後の係数は $-b_k$ である。

まず, 平均値の周りに反転したときの各係数を求める。

平均値 A は

$$A = \frac{(N-1)a_k - b_k}{N} = \left(1 - \frac{1}{N}\right) a_k - \frac{b_k}{N} \quad (\text{aD.1})$$

となる。平均値を引いて反転し, 平均値を足すと

$$\begin{aligned} a_k &\rightarrow -(a_k - A) + A = -a_k + 2A = \left(1 - \frac{2}{N}\right) a_k - \frac{2}{N} b_k \equiv a_{k+1} \\ b_k &\rightarrow -(-b_k - A) + A = b_k + 2A = 2\left(1 - \frac{1}{N}\right) a_k + \left(1 - \frac{2}{N}\right) b_k \equiv b_{k+1} \end{aligned} \quad (\text{aD.2})$$

となる。

次に, \hat{D} で計算したときの係数を求める。

$|p\rangle$ はどこでもよいので, 一番最後の状態とすると, 全状態は $(a_k, a_k, \dots, a_k, -b_k)^T$ となるので, \hat{D} を演算して,

$$\begin{pmatrix} -1 + \frac{2}{N} & \frac{2}{N} & \cdots & \frac{2}{N} & \frac{2}{N} \\ \frac{2}{N} & -1 + \frac{2}{N} & \cdots & \frac{2}{N} & \frac{2}{N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{2}{N} & \frac{2}{N} & \cdots & -1 + \frac{2}{N} & \frac{2}{N} \\ \frac{2}{N} & \frac{2}{N} & \cdots & \frac{2}{N} & -1 + \frac{2}{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ a_k \\ \vdots \\ a_k \\ -b_k \end{pmatrix} \quad (\text{aD.3})$$

を計算すればよい。 \hat{D} を演算した後の係数をそれぞれ a' , b' とすると,

$$a' = \left(-1 + \frac{2}{N} + \frac{2}{N}(N-2)\right) a_k - \frac{2}{N} b_k = \left(1 - \frac{2}{N}\right) a_k - \frac{2}{N} b_k$$

$$b' = \frac{2}{N}(N-1)a_k + \left(1 - \frac{2}{N}\right)b_k = 2\left(1 - \frac{1}{N}\right)a_k + \left(1 - \frac{2}{N}\right)b_k \quad (\text{aD.4})$$

となる。\$a_{k+1} = a'\$, \$b_{k+1} = b'\$ なので、確認できた。

問題 D.2 \$\hat{U}_p\$ と \$\hat{D}\$ はともにエルミート (\$\hat{U}_p^\dagger = \hat{U}_p\$, \$\hat{D}^\dagger = \hat{D}\$) であることは明らかである。したがって、

$$\begin{aligned} \hat{U}_p \hat{U}_p^\dagger &= \hat{U}_p^2 = (\hat{I} - 2|p\rangle\langle p|)^2 = \hat{I}^2 - 4|p\rangle\langle p| + 4|p\rangle\langle p||p\rangle\langle p| = \hat{I} - 4|p\rangle\langle p| + 4|p\rangle\langle p| = \hat{I} \\ \hat{D} \hat{D}^\dagger &= \hat{D}^2 = \left(\frac{2}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} - \hat{I} \right)^2 \\ &= \frac{4}{N^2} \begin{pmatrix} N & N & \cdots & N & N \\ N & N & \cdots & N & N \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ N & N & \cdots & N & N \\ N & N & \cdots & N & N \end{pmatrix} - \frac{4}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} + \hat{I}^2 \\ &= \hat{I} \end{aligned} \quad (\text{aD.5})$$

となって、ユニタリーであることが示された。

問題 D.3 問題 D.1 の解答の定式化を用いる。(D.1) と (D.2) より

$$|\psi_k\rangle = a_k \sum_{j=0; (j \neq p)}^{N-1} |j\rangle + b_k |p\rangle = \sqrt{N-1} a_k |a\rangle + b_k |p\rangle \quad (\text{aD.6})$$

となり、\$k=0\$ では

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \cos \theta, \quad b_0 = \sin \theta \quad (\text{aD.7})$$

である。(aD.2) を少し変形して \$a_k\$ の代わりに \$\sqrt{N-1}a_k\$ の組み合わせを用いて書くことにすると、

$$\begin{aligned} \sqrt{N-1} a_{k+1} &= \left(1 - \frac{2}{N}\right) \sqrt{N-1} a_k - \frac{2\sqrt{N-1}}{N} b_k \\ b_{k+1} &= 2 \frac{\left(1 - \frac{1}{N}\right)}{\sqrt{N-1}} \sqrt{N-1} a_k + \left(1 - \frac{2}{N}\right) b_k \end{aligned} \quad (\text{aD.8})$$

(D.1) より、\$\sin \theta \equiv \frac{1}{\sqrt{N}}\$, \$\cos \theta = \sqrt{\frac{N-1}{N}}\$ なので、

$$1 - \frac{2}{N} = 1 - 2 \sin^2 \theta = \cos(2\theta), \quad 1 - \frac{1}{N} = 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta \quad (\text{aD.9})$$

などに注意すると,

$$\begin{aligned}\sqrt{N-1}a_{k+1} &= \cos(2\theta)\sqrt{N-1}a_k - \sin(2\theta)b_k \\ b_{k+1} &= \sin(2\theta)\sqrt{N-1}a_k + \cos(2\theta)b_k\end{aligned}\quad (\text{aD.10})$$

を得る。 $k=0$ とすると, 次のようになる。

$$\begin{aligned}\sqrt{N-1}a_1 &= \cos(2\theta)\cos\theta - \sin(2\theta)\sin\theta = \cos(2\theta + \theta) = \cos(3\theta) \\ b_1 &= \sin(2\theta)\cos\theta + \cos(2\theta)\sin\theta = \sin(2\theta + \theta) = \sin(3\theta)\end{aligned}\quad (\text{aD.11})$$

となって, (D.6) が示せた。

問題 D.4 帰納法で証明する。 $k=0$ のときは問題 D.3 で示された。(aD.10) が k のときに成り立つとすると, 次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\sqrt{N-1}a_{k+1} &= \cos(2\theta)\cos((2k+1)\theta) - \sin(2\theta)\sin((2k+1)\theta) \\ &= \cos((2k+3)\theta) \\ b_{k+1} &= \sin(2\theta)\cos((2k+1)\theta) + \cos(2\theta)\sin((2k+1)\theta) \\ &= \sin((2k+3)\theta)\end{aligned}\quad (\text{aD.12})$$

したがって, $k+1$ のときにも成り立つので, (D.7) が示せた。

問題 D.5 (D.11) の右辺に \sqrt{r} の因子がかかるのは, m までの和を, 周期である r 回だけ繰り返すから。 \sqrt{r} になる理由は, 2 乗したときに全体の確率を 1 にするため。

付録 E

問題 E.1 エネルギー E , 運動量 p の量子が $+x$ 方向に移動している状態の波動関数 $|\psi(E, x)\rangle$ は次のように表される。

$$|\psi(E, x)\rangle = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right)\quad (\text{aE.1})$$

(aE.1) の両辺を時間 t で偏微分すると, 次式を得る。

$$\frac{\partial|\psi(E, x)\rangle}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}|\psi(E, x)\rangle\quad (\text{aE.2})$$

(aE.2) を (E.1) とを比較すると, エネルギー E がハミルトニアン \mathcal{H} に対応していることがわかる。つまり, シュレーディンガー方程式 (E.1) は, エネルギーをハミルトニアンに演算子化して得られたものである。(シュレーディンガー方程式は, このような考察から定式化され, 正しく問題を記述することがわかった。)