練習問題　解答

第 1 章

問 1–1

(1) $\frac{6}{\frac{3}{5}} = 6\times\frac{5}{3} = \frac{30}{3} = 10$　　別解　$\frac{6}{\frac{3}{5}} = \frac{6\times5}{\frac{3}{5}\times5} = \frac{30}{3} = 10$

割る数($\frac{3}{5}$)の逆数 ($\frac{5}{3}$) をかけます　　分母の分母を払うため分母・分子に 5 をかけます

(2) $\frac{3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 3\times2 = 6$　　別解　$\frac{3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3\times2}{\frac{1}{2}\times2} = 6$

割る数($\frac{1}{2}$)の逆数 ($\frac{2}{1} = 2$) をかけます　　分母の分母を払うため分母・分子に 2 をかけます

(3) $\frac{\frac{7}{2}}{3} = \frac{7}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{7}{6}$　　別解　$\frac{\frac{7}{2}}{3} = \frac{\frac{7}{2}\times2}{3\times2} = \frac{7}{6}$

割る数(3)の逆数 ($\frac{1}{3}$) をかけます　　分子の分母を払うため分母・分子に 2 をかけます

(4) $\frac{2-\frac{2}{3}}{5} = \frac{6-2}{3}\times\frac{1}{5} = \frac{4}{3}\times\frac{1}{5} = \frac{4}{15}$　　別解　$\frac{2-\frac{2}{3}}{5} = \frac{\frac{6}{3}-\frac{2}{3}}{5} = \frac{\frac{4}{3}}{5} = \frac{\frac{4}{3}\times3}{5\times3} = \frac{4}{15}$

割る数(5)の逆数 ($\frac{1}{5}$) をかけます　　分子の分母を払うため分母・分子に 2 をかけます

問 1–2

(1) $\frac{3.45}{0.69} = \frac{3.45}{\frac{69}{100}} = 3.45\times\frac{100}{69} = \frac{345}{69} = 5$　　割る数($\frac{69}{100}$)の逆数 ($\frac{100}{69}$) をかけます

別解　$\frac{3.45}{0.69} = \frac{3.45\times100}{0.69\times100} = \frac{345}{69} = 5$　　分母・分子に 100 をかけます

(2) $\frac{\frac{0.4}{200}}{\frac{0.5}{25}} = \frac{0.4}{200}\times\frac{25}{0.5} = \frac{0.4}{8}\times\frac{1}{0.5} = \frac{0.4}{4} = \frac{1}{10}$　　割る数($\frac{0.5}{25}$)の逆数 ($\frac{25}{0.5}$) をかけます

(3) $\frac{0.2}{0.15\times0.1} = \frac{0.2}{0.015} = \frac{2}{\frac{15}{100}} = 2\times\frac{100}{15} = 2\times\frac{20}{3} = \frac{40}{3}$　　割る数($\frac{15}{100}$)の逆数 ($\frac{100}{15}$) をかけます

別解　$\frac{0.2}{0.15\times0.1} = \frac{0.2\times1000}{0.15\times0.1\times1000} = \frac{200}{15} = \frac{40}{3}$　　分母・分子に 1000 をかけます

(4) $\frac{\frac{0.2}{0.3}}{0.15\left(1-\frac{0.2}{0.3}\right)} = \frac{\frac{0.2}{0.3}}{0.15\left(\frac{0.3-0.2}{0.3}\right)} = \frac{\frac{0.2}{0.3}}{0.15\times\frac{0.1}{0.3}} = \frac{\frac{0.2}{0.3}}{\frac{0.015}{0.3}} = \frac{0.2}{0.3}\times\frac{0.3}{0.015} = \frac{0.2}{0.015}$

$= \frac{0.2\times1000}{0.15\times1000} = \frac{200}{15} = \frac{40}{3}$　　式を展開したのち、分母・分子に 1000 をかけます

別解　$\frac{\frac{0.2}{0.3}}{0.15\left(1-\frac{0.2}{0.3}\right)} = \frac{\frac{2}{3}}{0.15\left(1-\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{2}{3}}{0.15\times\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}\times3}{0.15\times\frac{1}{3}\times3} = \frac{2}{0.15} = \frac{2\times100}{0.15\times100} = \frac{200}{15} = \frac{40}{3}$

式を展開したのち、分母・分子に 100 をかけます

問 1–3

(1) $\frac{ax-1}{a-\frac{1}{x}} = \frac{ax-1}{\frac{ax-1}{x}} = (ax-1)\times\frac{x}{ax-1} = x$

分母の計算をしてから、割る数($\frac{ax-1}{x}$)の逆数 ($\frac{x}{ax-1}$) をかけます

(2) $\frac{x-2}{1-\frac{1}{x-1}} = \frac{x-2}{\frac{x-1-1}{x-1}} = \frac{x-2}{\frac{x-2}{x-1}} = (x-2)\times\frac{x-1}{x-2} = x-1$

分母の計算をしてから、割る数($\frac{x-2}{x-1}$)の逆数 ($\frac{x-1}{x-2}$) をかけます

(3) $1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = 1-\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{1}{2}}} = 1-\frac{1}{1-2} = 1-(-1) = 2$

最初に、分母の計算をします

(4) $1-\frac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{1}{a}}}=1-\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{a-1}{a}}}=\frac{1}{1+\frac{a}{a-1}}=1-\frac{1}{\frac{a-1+a}{a-1}}=1-\frac{1}{\frac{2a-1}{a-1}}=1-\frac{a-1}{2a-1}=\frac{2a-1-(a-1)}{2a-1}=\frac{a}{2a-1}$

最初に、分母の計算をしてから、割る数$\left(\frac{2a-1}{a-1}\right)$の逆数 $\left(\frac{a-1}{2a-1}\right)$ をかけます

問 1–4

(1) $\frac{2}{5}=1.4-0.5t$

$0.5t=1.4-0.4=1$

$t=2$

(2) $\frac{50}{t}=10.0\times0.5^2=10.0\times0.25=2.5$　商と分母を入れ替えて、

$t=\frac{50}{2.5}=20$

(3) $25=\frac{52.5\times2.0\times10^{-5}}{t+2.0\times10^{-5}}$　商と分母を入れ替えて、

$t+2.0\times10^{-5}=\frac{52.5\times2.0\times10^{-5}}{25}$

$t=\frac{52.5\times2.0\times10^{-5}}{25}-2.0\times10^{-5}=4.2\times10^{-5}-2.0\times10^{-5}=2.2\times10^{-5}$

問 1–5

(1) $G=H-ST$ の式からSを求める式にするために、変形して、

$ST=H-G$ とします。

両辺をTで割って、

$S=\frac{H-G}{T}$

となります。

(2) $A=\frac{B}{K_m+C}$ の式からK_mを求める式にするために、商と分母を入れ替えて、

$K_m+C=\frac{B}{A}$ とします。Cを右辺に移項して、

$K_m=\frac{B}{A}-C$

となります。

問 1–6

(1)	25.043 m	有効数字 5 桁	有効桁数の約束事の(a)から
(2)	0.00031 mg	有効数字 2 桁	有効桁数の約束事の(b)から
(3)	6.51×10^{-3} g	有効数字 3 桁	有効桁数の約束事の(e)から
(4)	5.00×10^{4}/μL	有効数字 3 桁	有効桁数の約束事の(e)と(c)から

問 1–7

(1) $7.8+2.073=9.8\cancel{7}3=9.9$　小数点以下の桁数が最も小さい桁数 1 桁に合わせて丸めます

(2) $1.020\times6.10=6.22\cancel{2}=6.22$　最小有効桁数の 3 桁に丸めます

(3)　$2.50 \times 10^{20} \div (6.0 \times 10^{23}) = 0.41\cancel{6}66 \times 10^{-3} = 4.2 \times 10^{-4}$　最小有効桁数の 3 桁に丸めます

問 1–8

(1)　5 %を 100 で割ります　⇒ 0.05

(2)　0.025 %に 10,000 をかけます　⇒ 250 ppm

(3)　4856 ppm に 0.0001 をかけます　⇒ 0.4856 %

問 1–9

(1)　部分=全体×割合から、$24.5 \times \frac{12.5}{100} = 3.0625$ %

(2)　100 g ずつですから、全量で 200 g です。10 %の食塩水100 g中に食塩は、

部分 = 全体 × 割合から、$100 \times \frac{10}{100} = 10$ g、25 %の食塩水 100 g 中に食塩は、

$100 \times \frac{25}{100} = 25$ gがそれぞれ溶けています。

したがって、求める濃度は、割合 $= \frac{部分}{全体}$から、

$\frac{10+25}{200} \times 100 = \frac{35}{200} \times 100 = 17.5\%$

(3)　10 %の食塩水を 100 g と 25 %の食塩水を 25 g 混ぜると、全量で 125 g になります。

部分 = 全体 × 割合から、10 %の食塩水100 g中に食塩は、$100 \times \frac{10}{100} = 10$ g です。

また、25 %の食塩水25 g中に食塩は、$25 \times \frac{25}{100} = 6.25$ gです。

したがって、求める濃度は、割合 $= \frac{部分}{全体}$から、

$\frac{10+6.25}{125} \times 100 = \frac{16.25}{125} \times 100 = 0.13 \times 100 = 13$ %

問 1–10

(1)　食塩 25 g（溶質）と水100 g（溶媒）を合わせたので溶液は125 gです。

したがって、質量百分率 $= \frac{溶質の質量\ (g)}{溶質の質量\ (g) + 溶媒の質量\ (g)} \times 100$から、$\frac{25}{25+100} \times 100 = 20$ wt%

(2)　ある薬剤100 mgは0.1 g ですから、精製水100 mL中に、ある薬剤が0.1 g溶けていることになります。

質量対容量百分率 $= \frac{溶質の質量\ (g)}{溶液の体積\ (mL)} \times 100$から、$\frac{0.1}{100} \times 100 = 0.1$ w/v%

(3)　部分 = 全体 × 割合から、95.1 %のエタノール 415 mLに純粋のエタノールは、

$415 \times \frac{95.1}{100} = 394.7$ mL含まれます。

エタノール 415 mL に精製水 85 mL を加えると、500 mL となります。

体積百分率 $= \frac{溶質の体積\ (mL)}{溶液の体積\ (mL)} \times 100$の式から、$\frac{394.7}{500} \times 100 = 78.94$ vol%

問 1–11

塩化ナトリウム0.9 gを精製水に溶かして100 mLにしたので、

質量対容量百分率 $= \dfrac{\text{溶質の質量 (g)}}{\text{溶液の体積 (mL)}} \times 100$から、 $\dfrac{0.9}{100} \times 100 = 0.9$ w/v% となります。

溶液100 mL 中に 0.9 gの塩化ナトリウムが含まれているので、1 L中には、 $\dfrac{0.9}{100} \times 1000 = 9$ g 含まれています。溶質の塩化ナトリウム 9 g の物質量 (mol) を求めると、

溶質の物質量 $= \dfrac{\text{溶質の質量 (g)}}{\text{分子量}} = \dfrac{9\ (\text{g})}{58.44} = 0.154$ mol となります。

したがって、モル濃度 $= \dfrac{\text{溶質の物質量 (mol)}}{\text{溶液の体積 (L)}} = \dfrac{0.154\ (\text{mol})}{1\ (\text{L})} = 0.154$ mol/L となります。

問 1–12

(1) 部分=全体×割合から、から、$100 \times \dfrac{25}{100} = 25$ g

(2) 密度 $= \dfrac{\text{物質の質量 (g)}}{\text{物質の体積 (cm}^3\text{)}}$ から、物質の体積 $= \dfrac{\text{物質の質量}}{\text{密度}}$ を使って求めます。

求める体積は $\dfrac{100}{0.91} = 109.9\ \text{cm}^3 = 109.9$ mL

立方センチメートル (cm^3) の値をミリリットル (mL) に変換すると、値は同じになります。

1000 cm^3＝1 L と定義されていますので、$1\ \text{cm}^3 = 1$ mLです。

(3) ⑵から、109.9 mL 中に 25 g のアンモニアがあるので、

1000 mL中には、 $\dfrac{25}{109.9} \times 1000 = 227.5$ g

(4) アンモニア 227.5 gをmol換算すると、$\dfrac{227.5}{17.03} = 13.4$ mol 、

したがって、モル濃度 $= \dfrac{\text{溶質の物質量 (mol)}}{\text{溶液の体積 (L)}} = \dfrac{13.4\ (\text{mol})}{1\ (\text{L})} = 13.4$ mol/L

問 1–13

(1) ムコダインシロップは1 mL 中に、50 mg の原薬が含まれています。300 mg が必要なので、

1 回分の服用量は、 $\dfrac{300}{50} = 6$ mL となります。

(2) カルボシステインシロップ 5 %は、1 mL 中に、50 mg の原薬が含まれています。

120 mg が必要なので、1 回分の服用量は、$\dfrac{120}{50} = 2.4$ m L となります。

問 1–14

元素の原子量について、小数点以下の桁数は H 、C、O が 4 桁、Pb が 1 桁です。

式量は、各元素の原子量を足し合わせて算出しますから、

$Pb(CH_3COO)_2$の式量 $= (1.0079 \times 3 + 12.0107 \times 2 + 15.9994 \times 2) \times 2 + 207.2$

$= 325.2\cancel{8}78 \fallingdotseq 325.3$

有効数字の加減法では、小数点以下の桁数が最も少ない数値に合わせて計算することなっています。したがって、原子量の小数点以下の桁数が最も少ない（1 桁）の Pb (207.2) に合わせま

すので、小数点以下 2 位を四捨五入して、325.3 となります。したがって、整数部分と合わせて、有効数字は 4 桁です。

問 1–15

0 でない数字の前に 0 がある場合、その 0 は桁数として数えません。

したがって、「0.0120」の有効桁数は 3 桁となります。

問 1–16

バルプロ酸ナトリウム顆粒 20 %が原薬量として 1 日 400 mg 処方されていることから、秤取すべき 1 日分の製剤量は、

$$400 \div 0.2 = 400 \div \frac{2}{10} = 400 \times \frac{10}{2} = 2000\ \mathrm{mg/日} = 2\ \mathrm{g/日}$$

14 日分ですから、

秤取すべき 20 %顆粒の製剤量 $= 2\ \mathrm{g/日} \times 14\ 日 = 28\ \mathrm{g}$

したがって、秤取すべき 20 %顆粒の製剤量は、28 g となります。

第 2 章

問 2–1

(1) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ から、$5\sqrt[6]{a^3} = 5a^{\frac{3}{6}} = 5a^{\frac{1}{2}}$　　(2) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = a^{-\frac{2}{3}}$

(3) $x^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{x^4}$　　(4) $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

問 2–2

(1) $58500 = 5.85 \times 10^4$

(2) $\frac{5}{40000} = \frac{5}{4\times10^4} = \frac{5}{4} \times 10^{-4} = 1.25 \times 10^{-4}$

(3) $0.0043 = 4.3 \times 10^{-3}$

(4) $0.1 \times 0.01 \times 0.001 \times 0.0001 = 10^{-1} \times 10^{-2} \times 10^{-3} \times 10^{-4}$

$$= 10^{-1-2-3-4} = 10^{-10} = 1 \times 10^{-10}$$

問 2–3

指数を注意、割り算を掛け算

(1) $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \div 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}} = 3^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{4}{6}} = 3^{\frac{1}{6}}$

指数を注意、割り算を掛け算

(2)　$9^{1.5} \times 36^{-0.5} \div 12^2 \times 2^4 = 9^{1.5} \times 36^{-0.5} \times 12^{-2} \times 2^4$

$$= \left(\overbrace{3^2}\right)^{1.5} \times \left(\overbrace{2^2 \times 3^2}\right)^{-0.5} \times \left(\overbrace{2^2 \times 3}\right)^{-2} \times 2^4$$

$$= 3^{2\times1.5} \times 2^{2\times(-0.5)} \times 3^{2\times(-0.5)} \times 2^{2\times(-2)} \times 3^{-2} \times 2^4$$

$$= 3^3 \times 2^{-1} \times 3^{-1} \times 2^{-4} \times 3^{-2} \times 2^4$$

$$= 2^{-1-4+4} \times 3^{3-1-2} = 2^{-1} \times 3^0 = \frac{1}{2}$$

指数を注意、割り算を掛け算

(3)　$6^{1.2} \times 2^{0.6} \div \left(2^{0.5} \times 3^{\frac{3}{2}}\right) = (2 \times 3)^{1.2} \times 2^{0.6} \times (2^{0.5} \times 3^{1.5})^{-1}$

$$= 2^{1.2} \times 3^{1.2} \times 2^{0.6} \times 2^{0.5\times(-1)} \times 3^{1.5\times(-1)}$$

$$= 2^{1.2} \times 3^{1.2} \times 2^{0.6} \times 2^{-0.5} \times 3^{-1.5}$$

$$= 2^{1.2+0.6-0.5} \times 3^{1.2-1.5} = 2^{1.3} \times 3^{-0.3}$$

問 2–4

(1)　$10^5 \times 10^{-2} = 10^{5-2} = 10^3$

指数を注意、割り算を掛け算

(2)　$10^2 \div 10^{-3} = 10^2 \times 10^{-(-3)} = 10^2 \times 10^3 = 10^{2+3} = 10^5$

(3)　$0.1^3 \times 0.1^{-5} = (10^{-1})^3 \times (10^{-1})^{-5} = 10^{-3} \times 10^5 = 10^{-3+5} = 10^2$

(4)　$0.1^5 \div 10^{-6} = (10^{-1})^5 \times (10^{-6})^{-1} = 10^{-5} \times 10^6 = 10^{-5+6} = 10^1 = 10$

指数を注意、割り算を掛け算

問 2–5

(1)　$\sqrt[3]{e} = e^{\frac{1}{3}}$

$(a^r)^s = a^{rs}$

(2)　$(e^{0.2})^3 \times e^{0.5} = e^{0.2\times3} \times e^{0.5} = e^{0.6} \times e^{0.5} = e^{0.6+0.5} = e^{1.1}$

指数を注意、割り算を掛け算

(3)　$(e^{0.2})^3 \div e^{0.5} = e^{0.2\times3} \times e^{-0.5} = e^{0.6} \times e^{-0.5} = e^{0.6-0.5} = e^{0.1}$

(4)　$\sqrt[3]{e^{0.693}} = e^{\frac{0.693}{3}} = e^{0.231}$

問 2–6

(1) $\sqrt{x} = 0.2$ 両辺を 2 乗します。 $(\sqrt{x})^2 = 0.2^2 = 0.04$ $x = 0.04$

(2) $\sqrt[3]{x} = 0.3$ 両辺を 3 乗します。 $(\sqrt[3]{x})^3 = 0.3^3 = 0.027$ $x = 0.027$

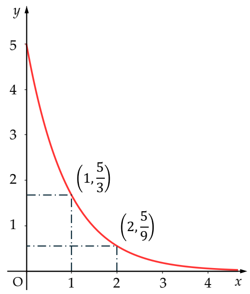
(3) $x^{\frac{1}{3}} = 0.9$ 両辺を 3 乗します。 $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 0.9^3 = 0.729$ $x = 0.729$

(4) $\sqrt[3]{x^2} = 2$ 両辺を 3 乗します。 $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3 = 2^3 = 8$ $x^2 = 8$ $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

問 2–7

$y = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $(x \geqq 0)$ のグラフ

y切片 5 で、$\left(1, \frac{5}{3}\right)$ と $\left(2, \frac{5}{9}\right)$ を通ります。

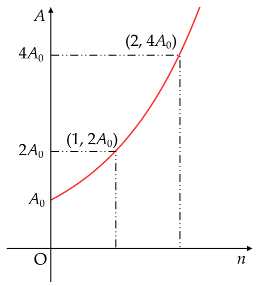


問 2–8

最初の DNA 量をA_0、サイクル数をn、増加した DNA 量をAとすると、

$A = A_0 \times 2^n$

となります。



問 2–9

最初の放射線量をA_0、ある時間t（日）の残存している放射線量Aとします。半減期は 14 日から計算式は、$A = A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{14}}$ となります。ここで、75 %減少したので、25 %残存していることになります。すなわち、$A = 0.25A_0 = \frac{1}{4}A_0$となります。

これを式に代入して、$\frac{1}{4}A_0 = A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{14}}$ となります。両辺をA_0で割ると、

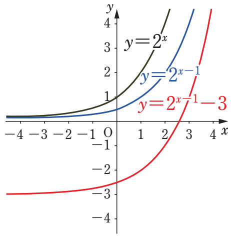
$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{14}}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{14}}$

となります。

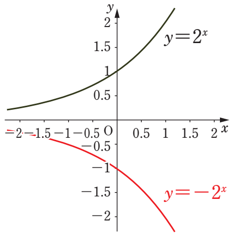
したがって、指数に注目すると、$2 = \frac{t}{14}$ となり、$t = 28$ 日が求められます。

問 2–10

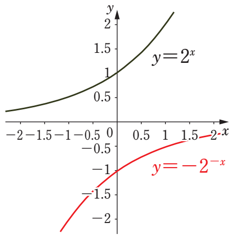
(1)　$y=2^{x-1}-3$ は、$y-(-3)=2^{x-1}$ から、$y=2^{x}$ のグラフ（黒線）を x 軸方向に 1、y 軸方向に–3 だけ平行移動したグラフ（赤線）です。



(2)　$y=-2^{x}$ は、$-y=2^{x}$から、$y=2^{x}$ のグラフ（黒線）を x 軸に関して対象移動したグラフ（赤線）です。

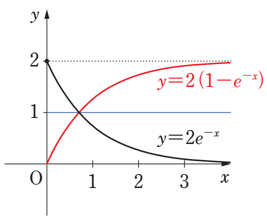


(3)　$y=-2^{-x}$ は、$-y=2^{-x}$から、$y=2^{x}$ のグラフ（黒線）を原点に関して対称移動したグラフ（赤線）です。



問 2–11

$y=2(1-e^{-x})$ のグラフは、$y=2-2e^{-x}$から、$5-2=-2e^{-x}$ となります。$y=2e^{-x}$ のグラフを x 軸に関して対称移動し、y 軸方向に 2 平行移動したグラフ(赤)になります。



問 2–12

カルボシステインシロップ 5 %は、100 mL 中に5 g (0.05 g/mL) の原薬が含まれていることになります。カルボシステインシロップは 1 回 120 mg 服用するので、比例式から、

$100\ \mathrm{mL} : 5000\ \mathrm{mg} = x\ \mathrm{mL} : 120\ \mathrm{mg}$　　別解　1 回量$=\dfrac{0.12\ \mathrm{g/回}}{0.05\ \mathrm{g/mL}}=2.4\ \mathrm{mL/回}$

$5000x = 12000$

$x = 2.4\ \mathrm{mL/日}$

プロカテロール塩酸塩シロップ 0.0005 %は、100 mL 中に、0.0005 g (= 0.5 mg = 500 μg、5 μg/mL) の原薬が含まれていることになります。プロカテロール塩酸塩シロップは、

1 回 15 μg 服用するので、比例式から、

$100\ \mathrm{mL} : 500\ \mu\mathrm{g} = x\ \mathrm{mL} : 15\ \mu\mathrm{g}$　　　別解　1 回量$= \frac{15\ \mu\mathrm{g}/回}{5\ \mu\mathrm{g/mL}} = 3\ \mathrm{mL}/回$

$500x = 1500$

$x = 3\ \mathrm{mL}/回$

カルボシステインシロップ 2.4 mL とプロカテロール塩酸塩シロップ 3 mL を合わせるので、1 回量は 5.4 mL となります。これに精製水を加えて整数値にするので、

1 回の服用量は 6 mL となります。

問 2–13

70 vol%エタノールを 3 L 調製するためには、100 vol%エタノールが 2100 mL (0.7 × 3000 mL) 必要です。また、95 vol%エタノール 100 mL 中にはエタノールが 95 mL 含まれています。

95 vol%エタノールの調製量を x mL、5 w/v%クロルヘキシジングルコン酸塩の調製量を y mL とすると、

$x = 3000\ \mathrm{mL} \times 0.7 \times \frac{100\ \mathrm{mL}}{95\ \mathrm{mL}} = 2210.5\ \mathrm{mL}$

$y = 3000\ \mathrm{mL} \times \frac{0.2\ \mathrm{w/v\%}}{5\ \mathrm{w/v\%}} = 120\ \mathrm{mL}$

したがって、95 vol%エタノールが 2210.5 mL と 5 w/v%クロルヘキシジングルコン酸塩が 120 mL 必要です。

第 3 章

問 3–1

(1)　$\frac{1}{125} = 5^{-3}$　　$\log_5 \frac{1}{125} = -3$

指数　真数　底

(2)　$-4 = \log_3 \frac{1}{81}$　　$3^{-4} = \frac{1}{81}$

指数　真数　底

(3)　$0 = \log_{10} 1$　　$10^0 = 1$

指数　真数　底

問 3–2

(1)　$\frac{1}{1000} = 10^{-3}$ から、 $\log_{10} \frac{1}{1000} = \log_{10} 10^{-3} = -3\log_{10} 10 = -3$

$\boxed{\log_a M^r = r \log_a M}$　$\boxed{\log_a a = 1}$

$\log_a M^r = r\log_a M$

(2)　$\frac{1}{36}=6^{-2}$ から、$\log_6\frac{1}{36}=\log_6 6^{-2}=-2\log_6 6=-2$

$\log_a a=1$

(3)　$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$ から、$\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_2 2=\frac{1}{2}$

$\log_a a=1$

問 3–3

(1)　$\log_2 x=0$から、$x=2^0=1$

(2)　$\log_{\frac{1}{3}} x=3$ から、 $x=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

(3)　$\log_5 x=-2$ から、 $x=5^{-2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$

問 3–4

指数の底と対数の底が同じ場合、$a^{\log_a M}=M$ が成り立ちます。

(1)　$10^{\log_{10}125}=125$ （指数の底 10、対数の底 10）

(2)　$8^{\log_2 7}$ 指数の底が 8、対数の底が 2 と異なるので、指数の底を 2 にそろえます。 $8=2^3$から、

$8^{\log_2 7}=2^{3\log_2 7}=2^{\log_2 7^3}=7^3=343$

(3)　$4=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ から、 $4^{\log_{\frac{1}{2}}10}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2\log_{\frac{1}{2}}10}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}10^{-2}}=10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}=0.01$

問 3–5

(1)　$\log_2\frac{8}{3}+\log_2 6=\log_2\left(\frac{8}{3}\times 6\right)=\log_2 16=\log_2 2^4=4\log_2 2=4$

(2)　$\log_3 6+\log_3 15-\log_3 10=\log_3\left(\frac{6\times 15}{10}\right)=\log_3 9=\log_3 3^2=2\log_3 3=2$

(3)　$2\log_2 6+\log_2 10-\log_2 90=\log_2 6^2+\log_2 10-\log_2 90=\log_2 36+\log_2 10-\log_2 90$

$=\log_2\left(\frac{36\times 10}{90}\right)=\log_2 4=\log_2 2^2=2\log_2 2=2$

問 3–6

対数の性質$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$と$a^{\log_a M}=M$を利用して、求めます。

(1)　$\log\frac{9}{8}=\log 9-\log 8=\log 3^2-\log 2^3=2\log 3-3\log 2=2\times 0.4771-3\times 0.3010$

$=0.9542-0.9030=0.0512$

(2)　$\log 1.8=\log\frac{18}{10}=\log 18-\log 10=\log(2\times 3^2)-\log 10=\log 2+\log 3^2-\log 10$

$=\log 2+2\log 3-\log 10=0.3010+2\times 0.4771-1=0.3010+0.9542-1=0.2552$

(3)　$\log\sqrt{45}=\log 45^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log\frac{90}{2}=\frac{1}{2}(\log 90-\log 2)=\frac{1}{2}\{\log(9\times 10)-\log 2\}$

$=\frac{1}{2}\{\log 9+\log 10-\log 2\}=\frac{1}{2}\{\log 3^2+\log 10-\log 2\}$

$=\frac{1}{2}\{2\log 3+\log 10-\log 2\}=\frac{1}{2}(2\times 0.4771+1-0.3010)$

$= \frac{1}{2}(0.9542 + 1 - 0.3010) = \frac{1}{2} \times 1.6532 = 0.8266$

問 3–7

対数の定義$a^p = M \Leftrightarrow p = \log_a M$から、

$\log 2 = 0.30 \to 10^{0.30} = 2$、$\log 3 = 0.48 \to 10^{0.48} = 3$

(1) $10^{-8.22} = 10^{0.30+0.48-9} = 10^{0.30} \times 10^{0.48} \times 10^{-9} = 2 \times 3 \times 10^{-9} = 6 \times 10^{-9}$

(2) $10^{0.7} = 10^{1-0.30} = 10^1 \times 10^{-0.30} = 10^1 \div 10^{0.30} = 10 \div 2 = 5$

(3) $(\sqrt{10})^{2.52} = \sqrt{10^{2.52}} = 10^{\frac{2.52}{2}} = 10^{1.26} = 10^{0.3+0.48\times 2} = 10^{0.3} + (10^{0.48})^2 = 2 \times 3^2 = 18$

問 3–8

(1) $2\log 3 + \log 15 - \log 13.5 = \log 3^2 + \log 15 - \log 13.5 = \log 9 + \log 15 - \log 13.5$

$= \log \frac{9\times 15}{13.5} = \log \frac{135}{13.5} = \log 10 = 1$

(2) $2\log 2 + 2\log 25 - \log \frac{5}{2} = 2\log 2 + 2\log 5^2 - \log\frac{5}{2} = 2\log 2 + 2 \times 2\log 5 - \log\frac{5}{2}$

$= 2\log 2 + 4\log 5 - (\log 5 - \log 2)$

$= 2\log 2 + 4\log 5 - \log 5 + \log 2 = 3\log 2 + 3\log 5$

$= 3(\log 2 + \log 5) = 3\log 10 = 3$

(3) $\log\frac{1}{4} + \log\frac{1}{50} - \log\frac{1}{2} = \log\frac{1}{4} + \log\frac{1}{50} - \log 2^{-1} = \log\frac{1}{4} + \log\frac{1}{50} - (-\log 2)$

$= \log\frac{1}{4} + \log\frac{1}{50} + \log 2 = \log\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{50} \times 2\right) = \log\frac{1}{100}$

$= \log 10^{-2} = -2\log 10 = -2$

問 3–9

$\ln X = 2.303\log X$から

(1) $\ln 10 = 2.303\log 10 = 2.303$

(2) $\ln\sqrt{10} = 2.303\log\sqrt{10} = 2.303\log 10^{\frac{1}{2}} = 2.303 \times \frac{1}{2}\log 10 = \frac{2.303}{2} = 1.1515$

(3) $\frac{\ln 8}{\ln 9} = \frac{2.303\log 8}{2.303\log 9} = \frac{\log 2^3}{\log 3^2} = \frac{3\log 2}{2\log 3} = \frac{3\times 0.3010}{2\times 0.4771} = \frac{0.9030}{0.9542} = 0.9463$

問 3–10

(1) $e^{\frac{3}{2}\ln 25} = e^{\frac{3}{2}\ln 5^2} = e^{\ln (5^2)^{\frac{3}{2}}} = e^{\ln 5^{2\times\frac{3}{2}}} = e^{\ln 5^3} = e^{1\ln 125} = 125$

(2) $e^{\ln 3 - \ln 5} = e^{\ln\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}$　　(3) $\exp(\ln 5) = e^{\ln 5} = 5$

問 3–11

(1) $\ln\frac{1}{e} + \ln\frac{1}{e^2} + \ln\frac{1}{e^3} = \ln e^{-1} + \ln e^{-2} + \ln e^{-3} = -\ln e - 2\ln e - 3\ln e$

$= -1 - 2 - 3 = -6$

別解　$\ln\frac{1}{e} + \ln\frac{1}{e^2} + \ln\frac{1}{e^3} = \ln\left(\frac{1}{e} \times \frac{1}{e^2} \times \frac{1}{e^3}\right) = \ln\frac{1}{e^6} = \ln e^{-6} = -6\ln e = -6$

(2) $2\ln 6e-\frac{1}{2}\ln 16e-\frac{2}{3}\ln 27e=2(\ln 6+\ln e)-\frac{1}{2}(\ln 16+\ln e)-\frac{2}{3}(\ln 27+\ln e)$

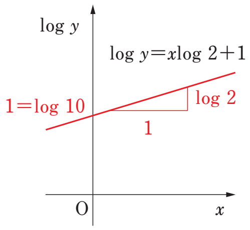
$$=2\{\ln(2\times 3)+e\}-\frac{1}{2}(\ln 2^4+\ln e)-\frac{2}{3}(\ln 3^3+\ln e)$$
$$=2(\ln 2+\ln 3+\ln e)-\frac{1}{2}(4\ln 2+\ln e)-\frac{2}{3}(3\ln 3+\ln e)$$
$$=2\ln 2+2\ln 3+2-2\ln 2-\frac{1}{2}-2\ln 3-\frac{2}{3}=2-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$$
$$=\frac{12-3-4}{6}=\frac{5}{6}$$

問 3–12

(1) $y=10\cdot 2^x$の両辺の対数をとると、

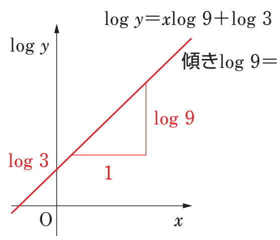
$\log y=\log(10\times 2^x)=1+\log 2^x=x\log 2+1$

となり、傾きlog 2、y切片が 1 の直線となります。



傾きlog 2=0.30

(2) $\log y=x\log 9+\log 3$は、傾きが $\log 9$ 、 y 切片が $\log 3$ の直線となります。



問 3–13

水酸化ナトリウムは強塩基の化学物質なので、100 %電離します。したがって、0.010 mol/L 水酸化ナトリウム水溶液中における水酸化物イオンのモル濃度は 0.010 mol/L であると考えられます。すなわち、$[OH^-]=0.010$ mol/L となります。

NaOH	→	Na^+	+	OH^-
0.010 mol/L		0.010 mol/L		0.010 mol/L

水のイオン積$Kw=[H^+][OH^-]=1.0\times 10^{-14}$ ですから、

$$[H^+]=\frac{1.0\times 10^{-14}}{[OH^-]}=\frac{1.0\times 10^{-14}\ (\mathrm{mol/L})^2}{0.010\ \mathrm{mol/L}}=1.0\times 10^{-12}\ \mathrm{mol/L}$$

したがって、0.010 mol/L 水酸化ナトリウム水溶液の pH は、

$$\mathrm{pH}=-\log[H^+]=-\log 1.0\times 10^{-12}=12$$

となります。

別解

pOH は、$\mathrm{pOH}=-\log[OH^-]$ から、

$$\mathrm{pOH}=-\log 0.010=-\log 10^{-2}=2$$

となります。$\mathrm{pH}+\mathrm{pOH}=14$から、$\mathrm{pH}=14-\mathrm{pOH}$

したがって、$pH = 14 - pOH = 14 - 2 = 12$ となります。

問 3–14

溶液の pH における分子形とイオン形の存在比は、次のヘンダーソン・ハッセルバルヒの式から求めることができます。

$$pH = pK_a + \log\frac{[\text{イオン形}]}{[\text{分子形}]}$$

問題文に「弱酸性薬物の水溶液の pH が、その薬物の pK_a より 2 高い」とありますので、弱酸性薬物の pK_a を X とすると、水溶液の pH はX+2となります。

このXと$X+2$を上の式に代入すると、

$$X + 2 = X + \log\frac{[\text{イオン形}]}{[\text{分子形}]}$$

$$2 = \log\frac{[\text{イオン形}]}{[\text{分子形}]} \qquad p = \log M \Leftrightarrow 10^p = M$$

$$\frac{[\text{イオン形}]}{[\text{分子形}]} = 10^2 = 100$$

となり、分子形とイオン形の存在比は、

分子形 : イオン形 = 1 : 100

となります。

問 3–15

この患者は併用薬の影響でテオフィリンの血中濃度が通常の 2.67 倍
(40 [μg/mL] ÷ 15 [μg/mL] ≒ 2.67) 近くまで増大し、中毒症状を起こしています。休薬することで、徐々にテオフィリンの血中濃度は低下するため、血中濃度が 15 μg/mL に低下するまでの休薬時間を計算で求めます。

問題文に「線形 1–コンパートメントモデルに従うもの」とありますので、テオフィリンの血中薬物濃度は、$\ln C = -kt + \ln C_0$で求めることができます。この式は、$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$から、

$$\ln C = -\frac{\ln 2}{t_{1/2}} \cdot t + \ln C_0$$

と変形できます。

問題文に「受診時のテオフィリンの血中濃度が 40 μg/mL」、「テオフィリンの血中濃度が 15 μg/mL に低下するまでに要する時間」とありますから、上の式を利用してテオフィリンの血中濃度が 40 μg/mL から 15 μg/mL に低下するまでの時間 t を求めます。

問題文から、半減期は 6.9 時間です。

$$\ln 15 = -\frac{0.69}{6.9} \cdot t + \ln 40$$

$$0.1t = \ln 40 - \ln 15 = \ln\frac{40}{15} = \ln\frac{8}{3} = \ln\frac{2^3}{3} = \ln 2^3 - \ln 3 = 3\ln 2 - \ln 3$$

$$= 3 \times 0.69 - 1.10 = 0.97$$

したがって、

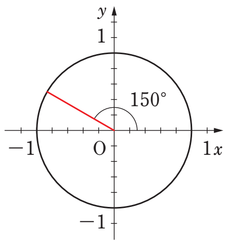
$t = 9.7$ 時間

すなわち、9.7 時間休薬すると、40 μg/mL あったテオフィリンの血中濃度は、15 μg/mL にまで低下します。

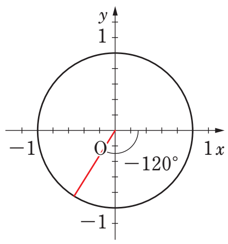
第 4 章

問 4–1

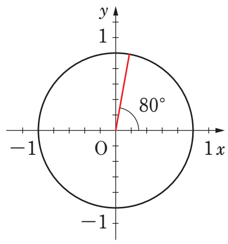
(1)　150°



(2)　$-480° = -360° - 120°$



(3)　$-640° = -360 \times 2 + 80°$



問 4–2

$\pi = 180°$ から

(1)　$210° = 210 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7}{6}\pi$　　(2)　$\frac{4}{5}\pi = \frac{4}{5} \times 180° = 144°$　　(3)　$\frac{5}{4}\pi = \frac{5}{4} \times 180° = 225°$

問 4–3

θ の動径が第 3 象限にありますので、$\sin\theta < 0$、$\cos\theta < 0$ となります。

$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ から、 $\tan\theta = 2$ を式に代入し、

$1 + 2^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}$

変形して、$\cos^2\theta = \frac{1}{5}$、 θ の動径が第 3 象限 にありますので、 $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ となります。

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ から、$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = 2 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

問 4–4

(1)　$\sin\frac{5}{2}\pi = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$　　(2)　$\cos\frac{7}{3}\pi = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

(3)　$\tan\frac{4}{3}\pi = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

問 4–5

(1)　$\frac{11}{4}\pi = 2\pi + \frac{3}{4}\pi$ から、 $\sin\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$　　$\cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$　　$\tan\frac{3}{4}\pi = -1$

(2)　$-\frac{8}{3}\pi = -2\pi - \frac{2}{3}\pi$ から、$\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$

$\tan\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\tan\frac{2}{3}\pi = -(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$

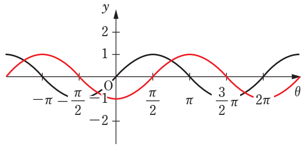
(3) $\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -\sin\frac{5}{6}\pi = -\frac{1}{2}$ $\quad\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -\tan\frac{5}{6}\pi = -\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

問 4–6

(1) $y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

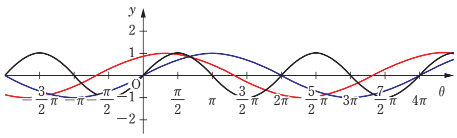
$y = \sin\theta$ のグラフ（黒線）を θ 軸方向に $\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したグラフ（赤線）



周期は 2π

(2) $y = \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right)$

$y = \sin\theta$ のグラフ（黒線）を θ 軸方向に 2 倍したグラフ（青線）を θ 軸方向に $-\frac{2}{3}\pi$ だけ平行移動したグラフ（赤線）

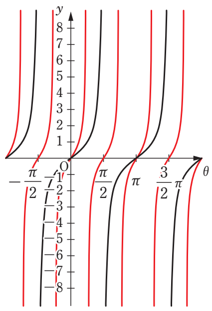


周期は4π

(3) $y = \tan 2\theta$

$y = \tan\theta$ のグラフ（黒線）を θ 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍したグラフ（赤線）

周期は $\frac{\pi}{2}$



問 4–7

(1) $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ\cos 30^\circ - \cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ\cos 30^\circ + \sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(3) $\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

分母を有理化するために、
分母・分子に$\sqrt{3}-1$をかけます。

$= \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2}$

$= 2-\sqrt{3}$ （$45^\circ, 60^\circ$の組み合わせでも解けます）

問 4–8

(1)　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ から、$\cos^2\alpha=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=1-\frac{25}{169}=\frac{144}{169}=\left(\frac{12}{13}\right)^2$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ から、$0<\cos\alpha$　したがって、$\cos\ \alpha=\frac{12}{13}$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{5}{13}\times\frac{12}{13}=\frac{120}{169}$$

(2)　$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$から、$\cos 2\alpha=1-2\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

問 4–9

(1)　半角の公式 $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\ \alpha}{2}$ から、

$$\cos^2\frac{\pi}{8}=\cos^2\frac{\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

割る数(2)の逆数 $\left(\frac{1}{2}\right)$ をかけます

os $\frac{\pi}{8}>0$ から、 $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

(2)　半角の公式 $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\ \alpha}{1+\cos\ \alpha}$ から、

分母を有理化するために、
分母分子に$\sqrt{2}-1$をかけます。

$$\tan^2\frac{\pi}{8}=\tan^2\frac{\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1}$$

$\tan\frac{\pi}{8}>0$ から、 $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$

問 4–10

(1)　積和の公式 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$ を使って、

$$\cos 75^\circ\cos 45^\circ=\frac{1}{2}\{\cos(75^\circ+45^\circ)+\cos(75^\circ-45^\circ)\}$$
$$=\frac{1}{2}(\cos\ 120^\circ+\cos\ 30^\circ)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

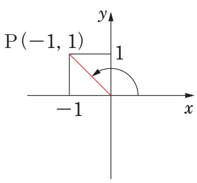
(2)　和積の公式 $\cos\ \alpha-\cos\ \beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ を使って、

$$\cos 105^\circ-\cos 15^\circ=-2\sin\frac{105^\circ+15^\circ}{2}\sin\frac{105^\circ-15^\circ}{2}=-2\sin 60^\circ\sin 45^\circ$$
$$=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

問 4–11

$-\sin\ \theta+\cos\ \theta$ を $a\sin\ \theta+b\cos\ \theta$ の式に当てはめると、$a=-1$、$b=1$ となります。

図にすると、



$r=\sqrt{(-1)^1+1^2}$から、

$-\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$

第 5 章

問 5–1

(1) $a_n = a + (n-1)d$ に代入して $a_n = 50 + (n-1)(-3) = 50 - 3n + 3 = -3n + 53$

(2) 初項 10 公差$9.8 - 10 = 9.6 - 9.8 = -0.2$ 式に代入すると、

$a_n = 10 + (n-1)(-0.2) = 10 - 0.2n + 0.2 = -0.2n + 10.2$

(3) $a_3 = a + (3-1)d = a + 2d = -4$

$a_{10} = a + (10-1)d = a + 9d = -46$

$a_{10} - a_3 = (a + 9d) - (a + 2d) = 7d = -46 - (-4) = -42$

$d = -6$

d を a_3 に代入すると、$a + 2\cdot(-6) = -4$ から、 $a = 8$

したがって、$a_n = 8 + (n-1)(-6) = 8 - 6n + 6 = -6n + 14$

問 5–2

(1) $a_{10} = 50 + (10-1)(-3) = 50 - 27 = 23$

$S_n = \frac{n(a+l)}{2}$ $\quad l$:末項から、 $S_{10} = \frac{10(50+23)}{2} = 365$

(2) $a = 10$、公差 $9.8 - 10 = 9.6 - 9.8 = -0.2$

$a_{10} = 10 + (10-1)(-0.2) = 8.2$

$S_{10} = \frac{10(10+8.2)}{2} = 91$

問 5–3

(1) 初項 98、公比 $9.8 \div 98 = 0.98 \div 9.8 = 0.1 = \frac{1}{10}$、 $a_n = 98 \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$

(2) 初項 1、公比 $\frac{1}{e} \div 1 = \frac{1}{e^2} \div \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$、 $a_n = 1 \times \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} = e^{-(n-1)} = e^{-n+1}$

(3) 初項 5、公比 $\frac{2}{3}$、 $a_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(注意：$5\cdot\frac{2^{n-1}}{3}$ にはなりません。必ず ( ) をつけてください)

問 5–4

(1) $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ を使って求めます。初項 $a = 6$ 、公比 $r = 4$

$S_n = \frac{6(4^n-1)}{4-1} = \frac{6(4^n-1)}{3} = 2(4^n - 1)$

(2) 初項 $a = 5$ 、公比 $r = \frac{2}{3}$

$S_n = \frac{5\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{2}{3}} \frac{5\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{\frac{1}{3}} = 5\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\} \times 3 = 15\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$

割る数$\left(\frac{1}{3}\right)$の逆数 (3) をかけます

問 5–5

(1)　初項から順に 1,2, 3, 4, 5 となるので第k項はkとなります。

したがって、$\sum_{k=1}^{5} k$

(2)　1, 2, 4, 8, 16 を書き直すと、$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$となります。

初項 1、公比 2 の等比数列です。

第 k 項は $a_k = 1 \times 2^{k-1} = 2^{k-1}$

したがって、$\sum_{k=1}^{5} 2^{k-1}$

(3)　初項から $\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}$

第 k 項は $\dfrac{1}{k^2}$ から、$\sum_{k=1}^{5} \dfrac{1}{k^2}$

問 5–6

(1)　$\sum_{k=1}^{8}(2k+1) = \sum_{k=1}^{8} 2k + \sum_{k=1}^{8} 1 = 2\sum_{k=1}^{8} k + \sum_{k=1}^{8} 1 = 2 \times \dfrac{8(8+1)}{2} + 8 = 80$

(2)　$\sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^{k-1} = 2\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} = 2 \times \dfrac{(3^n - 1)}{3-1} = 3^n - 1$

(3)　$\sum_{k=1}^{n-1} 5^{k-1} = \dfrac{5^{n-1} - 1}{5-1} = \dfrac{5^{n-1} - 1}{4}$

問 5–7

(1)　公比rが$-\frac{1}{2}$なので、$|r| < 1$ となり、0 に収束します。

(2)　公比 r が 3 で、$|r| > 1$ となり、正の無限大に発散します。

(3)　$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ と変形すると、$|r| < 1$ となり、0 に収束します。

問 5–8

(1)　公比 r が $\frac{2}{3}$ なので、 $|r| < 1$ となり、級数は収束します。

和$S = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 1 \times 3 = 3$　　割る数($\frac{1}{3}$)の逆数 (3) をかけます

(2)　公比 rが$-\frac{1}{3}$ なので、$|r| < 1$ となり、級数は収束します。

和$S = \frac{1}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$　　割る数($\frac{4}{3}$)の逆数 ($\frac{3}{4}$) をかけます

(3)　公比 r が$\frac{3}{2}$なので、$|r| > 1$となり、発散します。

問 5–9

問題文から、2 回目投与直前の血中濃度は、$\frac{1}{2}C_0 = 14$ μg/mL なので、

$C_0 = 28\ \mu g/mL$ です。

問題文に「消失半減期ごとに繰り返し静脈内投与する」とありますので、

$R = \frac{1}{1-e^{-k_e\tau}} = 2$

となります。したがって、

$1 - e^{-k_e\tau} = \frac{1}{2}$

$e^{-k_e\tau} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$ となります。

これらを$C_{ss,min} = \frac{C_0}{1-e^{-k_e\tau}} \cdot e^{-k_e\tau}$に代入すると、

$C_{ss,min} = \frac{28}{0.5} \cdot 0.5 = 28\ \ \mu g/mL$

となります。

消失半減期ごとに繰り返し投与すると、定常状態における最低血中濃度$C_{ss,min}$は、初濃度C_0と同じになります。

第 6 章

問 6–1

(1) $x = -1$ のとき、$y = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = -4$

$x = 1$ のとき、$y = 1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 0$

したがって、$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-(-4)}{1-(-1)} = \frac{4}{2} = 2$

(2) $x = -1$ のとき、$y = -4$

$x = -1 + h$ のとき、$y = (-1+h)^2 + 2 \cdot (-1+h) - 3 = -4 + h^2$

したがって、$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4+h^2-(-4)}{-1+h-(-1)} = \frac{h^2}{h} = h$

問 6–2

(1) $\lim_{h\to 0}(5 - h - 2h^2) = 5 - 0 - 2 \cdot 0^2 = 5$

(2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+3) = 2 + 3 = 5$

(3) $\lim_{h\to 0}\frac{-2h-3h^2+5h^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(-2-3h+5h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}(-2 - 3h + 5h^2) = -2 - 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0^2 = -2$

問 6–3

$$f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-(3+h)^2+2(3+h)-(-3^2+2\cdot 3)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-9-6h-h^2+6+2h-(-9+6)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-4h-h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(-4-h)}{h} = \lim_{h\to 0}(-4-h) = -4$$

問 6–4

(1) $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^2+3(x+h)-1-(2x^2+3x-1)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2x^2+4hx+2h^2+3x+3h-1-2x^2-3x+1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(4x+2h+3)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(4x+2h+3) = 4x+3$$

(2) $f'(x) = 4x+3$から、$x = -1, -2, -3$を代入し、

$f'(-1) = 4\cdot(-1)+3 = -1$

$f'(-2) = 4\cdot(-2)+3 = -5$

$f'(-3) = 4\cdot(-3)+3 = -9$

問 6–5

(1) $y' = (2x^3 - x^2 + 4x + 3)' = 2\cdot 3x^{3-1} - 2x^{2-1} + 4\cdot 1 + 0 = 6x^2 - 2x + 4$

(2) $y' = (-3x^2 + 2x^{-2})' = -3\cdot 2x^{2-1} + 2\cdot(-2)x^{-2-1} = -6x - 4x^{-3}$

(3) $y' = \left(x - \frac{1}{x}\right)' = (x - x^{-1})' = 1 - (-1)x^{-1-1} = 1 + x^{-2} = 1 + \frac{1}{x^2}$

(4) $y' = \left(\sqrt{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$

$= \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

(5) $y' = \left((x^2+1)(2x-1)\right)' = (x^2+1)'(2x-1) + (x^2+1)(2x-1)'$

$= 2x(2x-1) + (x^2+1)2 = 4x^2 - 2x + 2x^2 + 2 = 6x^2 - 2x + 2$

(6) $y' = \left(\frac{3}{x^2+1}\right)' = 3\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = 3\cdot\left(-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right) = -\frac{6x}{(x^2+1)^2}$

(7) $y' = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{1(x+1)-(x-1)1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

問 6–6

$y' = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$

したがって、

$x < -3, x > 1$　のとき、$y' > 0$で、yは増加

$-3 < x < 1$　　のとき、$y' < 0$で、yは減少

となります。

y'はxの 2 次関数で、グラフは下に凸となります。
x軸との共有点は、方程式$y' = 0$を解いて、$x = -3, 1$
あとは、y'のグラフからy'の符号が導かれます。

問 6–7

(1) $y' = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)'x - e^x(x)'}{x^2} = \frac{e^x x - e^x\cdot 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$

(2) $y' = (x^2\ln x)' = (x^2)'\ln x + x^2(\ln x)' = 2x\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x} = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1)$

(3) $y' = \left(\frac{\cos x}{x}\right)' = \frac{(\cos x)'x - \cos x\cdot(x)'}{x^2} = \frac{(-\sin x)x - \cos x\cdot 1}{x^2} = \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2} = -\frac{x\sin x + \cos x}{x^2}$

(4) $y' = (x\tan x)' = (x)'\tan x + x(\tan x)' = 1\cdot\tan x + x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$

問 6–8

tをxとして公式を用います。

(1) $h' = (4.9t^2)' = 4.9 \cdot 2t^{2-1} = 9.8t$

(2) $y' = 2e^t$

(3) $y' = -2\cos t$

問 6–9

(1) $y' = ((2x-1)^3)' = 3 \cdot 2(2x-1)^{3-1} = 6(2x-1)^2$

(2) $y' = \left(\frac{1}{(x^2+1)^2}\right)' = ((x^2+1)^{-2})' = -2(x^2+1)'(x^2+1)^{-2-1} = -2 \cdot 2x(x^2+1)^{-3}$

$= -\frac{4x}{(x^2+1)^3}$

(3) $y' = \left(\sqrt{3x-2}\right)' = \left((3x-2)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 3(3x-2)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{3(3x-2)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$

(4) $y' = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\right)' = \left((x^2+4)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}(x^2+4)'(x^2+4)^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} \cdot 2x(x^2+4)^{-\frac{3}{2}}$

$= -\frac{x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$

(5) $y' = \left(\ln(x^2+3)\right)' = \frac{(x^2+3)'}{x^2+3} = \frac{2x}{x^2+3}$

(6) $y' = (\cos(-x+\pi))' = -1\{-\sin(-x+\pi)\} = \sin(-x+\pi)$

(7) $y' = (xe^{x+2})' = (x)'e^{x+2} + x(e^{x+2})' = 1 \cdot e^{x+2} + x \cdot 1e^{x+2} = (x+1)e^{x+2}$

問 6–10

(1) $C' = (100e^{-0.2t})' = 100 \cdot (-0.2)e^{-0.2t} = -20e^{-0.2t}$

(2) $y' = \left(\ln(3t-1)\right)' = \frac{3}{3t-1}$

(3) $y' = (5\sin(2t+\pi))' = 5 \cdot 2\cos(2t+\pi) = 10\cos(2t+\pi)$

問 6–11

(1) $f_x(x,y) = (x\sin y + y\cos x)' = (x\sin y)' + (y\cos x)' = 1 \cdot \sin y + y(-\sin x)$

$= \sin y - y\sin x$

$f_y(x,y) = (x\sin y + y\cos x)' = (x\sin y)' + (y\cos x)' = x\cos y + 1 \cdot \cos x$

$= x\cos y + \cos x$

(2) $f_x(x,y) = \left(e^{x^2+y^2}\right)' = (x^2+y^2)'e^{x^2+y^2} = 2xe^{x^2+y^2}$

$f_y(x,y) = \left(e^{x^2+y^2}\right)' = (x^2+y^2)'e^{x^2+y^2} = 2ye^{x^2+y^2}$

問 6–12

(1) $f_x(x,y) = (3x+2y)' = (3x)' + (2y)' = 3 \cdot 1 + 0 = 3$

$f_y(x,y) = (3x+2y)' = (3x)' + (2y)' = 0 + 2 \cdot 1 = 2$

したがって、求める全微分は、

$dz = 3dx + 2dy$

(2) $f_s(s,t) = (\sin s \cos t)' = \cos s \cos t$

$f_t(s,t) = (\sin s \cos t)' = \sin s\,(-\sin t) = -\sin s \sin t$

したがって、求める全微分は、

$$dz = \cos s \cos t\, ds - \sin s \sin t\, dt$$

問 6–13

$f(x,y) = \sqrt{xy}$と置きます。

(1) 偏微分$f_x(x,y), f_y(x,y)$を求めると、

$$f_x(x,y) = \left(\sqrt{xy}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$$

$$f_y(x,y) = \left(\sqrt{xy}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}$$

したがって、求める全微分は、

$$dz = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}dx + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}dy$$

(2) $x = 2$、$y = 2$、$dx = 0.03$、$dy = -0.02$とおくと、

$$f(2.03, 1.98) = \sqrt{2\cdot 2} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\cdot 0.03 + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(-0.02) = 2 + 0.015 - 0.01 = 2.005$$

実際の値は、$\sqrt{2.03\cdot 1.98} = 2.004844\cdots$

第 7 章

問 7–1

Cは積分定数とします。

(1) $\displaystyle\int(-2x^3 + 3x - 7)\,dx = -2\cdot\frac{1}{4}x^4 + 3\cdot\frac{1}{2}x^2 - 7x + C = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 7x + C$

(2) $\displaystyle\int\left(2\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x^2}\right)dx = \int\left(2x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{2}{3}}\right)dx = 2\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C = \frac{4}{5}\sqrt{x^5} - \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^5} + C$

(3) $\displaystyle\int\left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(3x^{-2} - x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = 3\cdot\frac{1}{-1}x^{-1} - \frac{2}{1}x^{\frac{1}{2}} + C = -\frac{3}{x} - 2\sqrt{x} + C$

(4) $\displaystyle\int(10^x - 2e^x)\,dx = \frac{10^x}{\ln 10} - 2e^x + C$

(5) $\displaystyle\int(3\sin x - 4\cos x)\,dx = 3(-\cos x) - 4\sin x + C = -3\cos x - 4\sin x + C$

(6) $\displaystyle\int\left(1 - \frac{1}{\cos x}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)dx = \int\left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = x - \tan x + C$

問 7–2

Cは積分定数とします。

(1) $\displaystyle\int(4x-3)^2\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}(4x-3)^3 = \frac{1}{12}(4x-3)^3 + C$

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx = \int(2x+3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2}(2x+3)^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{2x+3} + C$

(3) $\displaystyle\int e^{3x-2}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x-2} + C$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{-1x+2} = \frac{1}{-1}\ln|-x+2| + C = -\ln|-x+2| + C$

(5) $\displaystyle\int \sin(2x-5)\,dx = \frac{1}{2}\{-\cos(2x-5)\} + C = -\frac{1}{2}\cos(2x-5) + C$

(6) $\displaystyle\int \cos(3x-4)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x-4) + C$

(7) $\displaystyle\int \frac{2}{\cos^2(2x+5)}dx = 2\cdot\frac{1}{2}\tan(2x+5) + C = \tan(2x+5) + C$

問 7–3

Cは積分定数とします。

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$において、$t=\sqrt{x+1}$と置くと、$t^2 = x+1$

変形して、$x = t^2 - 1$、tについて微分すると、$\dfrac{dx}{dt} = 2t$、変形して、$dx = 2t\,dt$ となります。

したがって、

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{t^2-1}{t}2t\,dt = \int (2t^2-2)\,dt = 2\cdot\frac{1}{3}t^3 - 2t + C = \frac{2}{3}t(t^2-3) + C$$
$$= \tfrac{2}{3}\sqrt{x+1}(x+1-3) + C = \tfrac{2}{3}\sqrt{x+1}(x-2) + C$$

別解

$t = x+1$ と置くと、$x = t-1$

tについて微分すると、$\dfrac{dx}{dt} = 1$、変形して、$dx = dt$ となります。

したがって、

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{t-1}{\sqrt{t}}dt = \int \left(\frac{t-1}{t^{\frac{1}{2}}}\right)dt = \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)dt = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}t^{\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}t^{-\frac{1}{2}+1} + C$$
$$= \frac{1}{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}} + C = \tfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + C = \tfrac{2}{3}t(\sqrt{t}) - 2\sqrt{t} + C = \tfrac{2}{3}\sqrt{t}(t-3) + C$$
$$= \tfrac{2}{3}\sqrt{x+1}(x+1-3) + C = \tfrac{2}{3}\sqrt{x+1}(x-2) + C$$

(2) $\int \cos x\,(1-\sin^2 x)\,dx$ において、$t = \sin x$ と置き、xについて微分すると、$\dfrac{dt}{dx} = \cos x$、

変形して、$dt = \cos x\,dx$ となります。

したがって、

$$\int \cos x\,(1-\sin^2 x)\,dx = \int (1-t^2)\,dt = t - \frac{1}{3}t^3 + C = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

問 7–4

Cは積分定数とします。

微分

(1) $$\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}dx = \int (2x-1)\,(x^2-x+1)^{-2}dx$$
$$= \tfrac{1}{-1}(x^2-x+1)^{-1} + C = -\tfrac{1}{x^2-x+1} + C$$

(2) $\displaystyle \int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \int \frac{1}{3}\cdot 3x^2\overset{\text{微分}}{(x^3+1)^{\frac{1}{2}}}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{9}\sqrt{(x^3+1)^3}+C$

(3) $\displaystyle \int (x-1)\,e^{x^2-2x-1}dx = \int \frac{1}{2}(2x-2)\,e^{\overset{\text{微分}}{x^2-2x-1}}dx = \frac{1}{2}e^{x^2-2x-1}+C$

(4) $\displaystyle \int \frac{4x}{x^2+3}dx = \int \frac{2\cdot 2x}{\underset{}{\overset{\text{微分}}{x^2+3}}}dx = 2\ln(x^2+3)+C$

(5) $\displaystyle \int \frac{e^x}{\overset{\text{微分}}{e^x+1}}dx = \ln(e^x+1)+C$

(6) $\displaystyle \int (2x+1)\cos(\overset{\text{微分}}{x^2+x+2})\,dx = \sin(x^2+x+2)+C$

問 7–5

Cは積分定数とします。

(1) $\displaystyle \int \overset{\text{そのまま}}{x}\underset{\text{積分}}{\sin x}\,dx = x(-\cos x) - \int \overset{\text{微分}}{1}\cdot\underset{\text{そのまま}}{(-\cos x)}\,dx = -x\cos x+\sin x+C$

(2) $\displaystyle \int \overset{\text{そのまま}}{\underset{\text{積分}}{x}}\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \underset{\text{そのまま}}{\frac{1}{2}x^2}\cdot\overset{\text{微分}}{\frac{1}{x}}dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int\frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2+C$

$\displaystyle = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

問 7–6

(1) $\displaystyle \int_{-2}^{-1}(-3x^2+4x+2) = [-x^3+2x^2+2x]_{-2}^{-1} = -[x^3]_{-2}^{-1}+2[x^2]_{-2}^{-1}+2[x]_{-2}^{-1}$

$= -\{(-1)^3-(-2)^3\}+2\{(-1)^2-(-2)^2\}+2\{-1-(-2)\}$

$= -(-1+8)+2(1-4)+2(-1+2) = -7-6+2 = -11$

(2) $\displaystyle \int_1^8\left(2\sqrt[3]{x}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx = \int_1^8\left(2x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)dx = \left[2\cdot\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{1}x^{\frac{1}{3}}\right]_1^8 = \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{x^4}\right]_1^8-\left[\sqrt[3]{x}\right]_1^8$

$\displaystyle = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{8^4}-\sqrt[3]{1^4}\right)-\left(\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{1}\right) = \frac{3}{2}(16-1)-(2-1) = \frac{45}{2}-1 = \frac{43}{2}$

(3) $\displaystyle \int_1^e\frac{x-1}{x}dx = \int_1^e\left(1-\frac{1}{x}\right)dx = [x]_1^e-[\ln|x|]_1^e = e-1-(\ln e-\ln 1) = e-1-1 = e-2$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^{0} 2^x \ln 2\,dx = \left[\frac{2^x \ln 2}{\ln 2}\right]_{-1}^{0} = [2^x]_{-1}^{0} = 2^0 - 2^{-1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(5) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} (3\sin x + 4\cos x)\,dx = -3[\cos x]_0^\pi + 4[\sin x]_0^\pi = -3(\cos\pi - \cos 0) + 4(\sin\pi - \sin 0)$

$= -3(-1-1) + 4(0-0) = 6$

(6) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{\cos^2 x}\,dx = [\sqrt{2}\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right) = \sqrt{2}(1-0) = \sqrt{2}$

問 7–7

(1) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(3x+1)^2}\,dx = \int_0^3 (3x+1)^{-2}dx = \left[\frac{1}{-1}\cdot\frac{1}{3}(3x+1)^{-1}\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3x+1}\right]_0^3$

$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{1}\right) = \frac{3}{10}$

(2) $\displaystyle\int_1^3 \sqrt[3]{13x-12}\,dx = \int_1^3 (13x-12)^{\frac{1}{3}}dx = \left[\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{13}(13x-12)^{\frac{4}{3}}\right]_1^3 = \frac{3}{52}\left[\sqrt[3]{(13x-12)^4}\right]_1^3$

$= \frac{3}{52}\left(\sqrt[3]{27^4} - \sqrt[3]{1^4}\right) = \frac{3}{52}(81-1) = \frac{60}{13}$

(3) $\displaystyle\int_0^2 e^{-2x}\,dx = \left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_0^2 = -\frac{1}{2}[e^{-2x}]_0^2 = -\frac{1}{2}(e^{-4} - e^0) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^4} - 1\right) = \frac{e^4-1}{2e^4}$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x+\pi)\,dx = \left[\frac{1}{2}\{-\cos(2x+\pi)\}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}[\cos(2x+\pi)]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\frac{1}{2}(\cos 2\pi - \cos\pi) = -\frac{1}{2}\{1-(-1)\} = -1$

(5) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \left[\frac{1}{3}(\ln x)^3\right]_1^e = \frac{1}{3}[(\ln x)^3]_1^e = \frac{1}{3}\{(\ln e)^3 - (\ln 1)^3\} = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$

(6) $\displaystyle\int_2^5 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx = [\ln|x^2-x+1|]_2^5 = \ln|25-5+1| - \ln|4-2+1|$

$= \ln 21 - \ln 3 = \ln\frac{21}{3} = \ln 7$

問 7–8

(1) $\int_1^5 x\sqrt{x-1}\,dx$において、$t=\sqrt{x-1}$ と置くと、$t^2 = x-1$、変形して、$x = t^2+1$、

tについて微分すると、$\frac{dx}{dt} = 2t$、変形して、$dx = 2t\,dt$ となります。

$t=\sqrt{x-1}$に$x=1$を代入すると、$t=0$、

$x=5$を代入すると、$t=\sqrt{5-1}=2$となります。

ですので、積分区間は下表のように対応します。

x	$1 \to 5$
t	$0 \to 2$

したがって、

$\displaystyle\int_1^5 x\sqrt{x-1}\,dx = \int_0^2 t(t^2+1)\,2t\,dt = 2\int_0^2 (t^4+t^2)\,dt = 2\left[\frac{1}{4+1}t^{4+1} + \frac{1}{2+1}t^{2+1}\right]_0^2$

$= 2\left[\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3\right]_0^2$

$= \frac{2}{5}[t^5]_0^2 + \frac{2}{3}[t^3]_0^2 + \frac{2}{5}(2^5 - 0^5) + \frac{2}{3}(2^3 - 0^3)$

$$= \frac{64}{5} + \frac{16}{3} = \frac{272}{15}$$

(2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ において、$x = \sin t$ と置き、tについて微分すると、$\frac{dx}{dt} = \cos t$、

変形して、$dx = \cos t\, dt$ となります。

$x = \sin t$に$x = 0$を代入すると、$\sin t = 0$、ゆえに、$t = 0$、

$x = 1$を代入すると、$\sin t = 1$、ゆえに、$t = \frac{\pi}{2}$となります。

ですので、積分区間は下表のように対応します。

x	$0 \to 1$
t	$0 \to \frac{\pi}{2}$

したがって、

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos t} \cos t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = [t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

問 7–9

(1) $\int_0^1 xe^x\, dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x\, dx = 1 \cdot e - 0 \cdot e^0 - [e^x]_0^1 = e - (e - e^0) = 1$

(2) $\int_e^{e^2} 1 \cdot \ln x\, dx = [x \ln x]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x \cdot \frac{1}{x} dx = e^2 \ln e^2 - e \ln e - [x]_e^{e^2} = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2$

問 7–10

(1) $f(x) = -x^3$と置くと、$f(-x) = -(-x)^3 = x^3 = -f(x)$ から、奇関数

$g(x) = -3x^2$と置くと、$g(-x) = -3(-x)^2 = -3x^2 = g(x)$ から、偶関数

したがって、

$$\int_{-2}^2 (-x^3 - 3x^2)\, dx = \int_{-2}^2 (-x^3)\, dx + \int_{-2}^2 (-3x^2)\, dx = 0 + 2\int_0^2 (-3x^2)\, dx = 2[-x^3]_0^2$$

$$= -2[x^3]_0^2 = -2(2^3 - 0) = -16$$

(2) $f(x) = \cos x$と置くと、$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$ から、偶関数

したがって、

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 2[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 2$$

問 7–11

(1) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \lim_{h\to 0} \int_h^1 x^{-\frac{2}{3}} dx = \lim_{h\to 0} \left[\frac{3}{1} x^{\frac{1}{3}}\right]_h^1 = \lim_{h\to 0} 3[\sqrt[3]{x}]_h^1 = \lim_{h\to 0} 3(\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{h}) = 3(1-0) = 3$

(2) $\int_0^\infty e^{-x}\, dx = \lim_{h\to\infty} \int_0^h e^{-x}\, dx = \lim_{h\to\infty} \left[\frac{1}{-1} e^{-x}\right]_0^h = \lim_{h\to\infty} \{-[e^{-x}]_0^h\} = \lim_{h\to\infty} \{-(e^{-h} - e^0)\}$

$$= \lim_{h\to\infty} \left(-\frac{1}{e^h} + 1\right) = 0 + 1 = 1$$

第 8 章

問 8–1

(1) $\frac{dy}{dx}=-2x$ の両辺にdxをかけて積分すると、

$$\int dy=\int(-2x)dx$$

$$y=-2\cdot\frac{1}{2}x^2+C$$ 積分定数 C は 1 つだけで構いません。両辺にそれぞれ書く必要はありません。

したがって、一般解は、$y=-x^2+C$（Cは任意定数）

(2) $\frac{dy}{dx}=y$ の両辺をyで割り、dxをかけると、$\frac{1}{y}dy=dx$

両辺を積分して、

$$\int\frac{1}{y}dy=\int dx$$

$$\ln|y|=x+C$$

したがって、$|y|=e^{x+C}=e^Ce^x$

$$y=\pm e^Ce^x$$

$\pm e^C$を改めてCに置き直すと、

一般解は、$y=Ce^x$（Cは任意定数）

(3) $\frac{dy}{dx}=-xy$ の両辺をyで割り、dxをかけると、$\frac{1}{y}dy=-x\,dx$

両辺を積分して、

$$\int\frac{1}{y}dy=\int(-x)\,dx$$

$$\ln|y|=-\frac{1}{2}x^2+C$$

したがって、$|y|=e^{-\frac{1}{2}x^2+C}=e^Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$

$$y=\pm e^Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$\pm e^C$を改めてCに置き直すと、

一般解は、$y=Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$（Cは任意定数）

(4) $x\frac{dy}{dx}=y+1$ の両辺を$x(y+1)$でわり、dxをかけると、$\frac{1}{y+1}dy=\frac{1}{x}dx$

両辺を積分して、

$$\int\frac{1}{y+1}dy=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\ln|y+1|=\ln|x|+C$$

ln を 1 つにまとめて、$\ln|y+1|-\ln|x|=C$

$$\ln\frac{|y+1|}{|x|}=C$$

$$\left|\frac{y+1}{x}\right|=e^C$$

したがって、$\frac{y+1}{x}=\pm e^C$

$\pm e^C$を改めてCに置き直すと、

一般解は、$y+1=Cx$ すなわち、$y=Cx-1$（Cは任意定数）

初期条件$x=2$のとき、$y=1$を代入して、$1=2C-1$

したがって、$C=1$

ゆえに、特殊解は、$y=x-1$

(5) $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ の両辺に$y\,dx$をかけて、$y\,dy=-x\,dx$

両辺を積分して、

$$\int y\,dy=\int(-x)\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C$$

$$x^2+y^2=2C$$

$2C$を改めてCに置き直すと、

一般解は、$x^2+y^2=C$（Cは 0 以上の任意定数）

初期条件$x=3$のとき、$y=4$を代入して、$9+16=C$

したがって、特殊解は、$x^2+y^2=25$

問 8–2

(1) $xy'+1\cdot y=3x^2+1$ から、

$(xy)'=3x^2+1$　両辺を積分して、

$$xy=\int(3x^2+1)\,dx=x^3+x+C$$

両辺をxで割ると、一般解は、$y=x^2+\frac{C}{x}+1$（Cは任意定数）

また、一般解に初期条件$x=2$のとき、$y=6$を代入すると、

$$6=4+\frac{C}{2}+1$$

これから、$C=2$

特殊解は、$y=x^2+\frac{2}{x}+1$

(2) $y'+y=e^x$

$F(x)=\int dx=x$と置くと、$e^{F(x)}=e^x$、$e^{-F(x)}=e^{-x}$

したがって、

$$y=e^{-x}\left\{\int e^xe^x\,dx+C\right\}=e^{-x}\left\{\int e^{2x}\,dx+C\right\}=\frac{1}{e^x}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+C\right)=\frac{e^x}{2}+\frac{C}{e^x}$$

すなわち、一般解は、$y=\frac{e^x}{2}+\frac{C}{e^x}$

また、一般解に初期条件$x=0$のとき、$y=\frac{3}{2}$を代入すると、

$$\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+\frac{C}{1}$$

これから、$C=1$

特殊解は、$y=\frac{e^x}{2}+\frac{1}{e^x}$

(3) $y'+2xy=-x$

$F(x)=\int 2xdx=x^2$と置くと、$e^{F(x)}=e^{x^2}$、$e^{-F(x)}=e^{-x^2}$

$$y = e^{-x^2}\left\{\int e^{x^2}(-x)\,dx + C\right\} = e^{-x^2}\left\{\int \left(-\frac{1}{2}\cdot 2xe^{x^2}\right)dx + C\right\} = e^{-x^2}\left(-\frac{1}{2}e^{x^2} + C\right)$$
$$= -\frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$$

すなわち、一般解は、$y = Ce^{-x^2} - \frac{1}{2}$

また、一般解に初期条件$x = 1$のとき、$y = \frac{1}{2}$を代入すると、$\frac{1}{2} = Ce^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{C}{e} - \frac{1}{2}$

これから、$C = e$

特殊解は、$y = e \cdot e^{-x^2} - \frac{1}{2}$、すなわち、$y = e^{-x^2+1} - \frac{1}{2}$

問 8–3

グラフから、半減期以前では、A＞B＞C の順に分解の反応速度は、速くなっています。

一方、半減期以降では、C＞B＞A 順に分解の反応速度は、速くなっています。また、C はリニアな通常のグラフで、C の濃度と時間の関係が直線になっています。

ですから、A の分解は 2 次反応、B の分解は 1 次反応、C の分解は 0 次反応です。

0 次反応の半減期は、$t_{1/2} = \frac{C_0}{2k}$から、濃度に正比例します。

したがって、濃度が 2 倍の 20 mg/mL になれば、半減期も 2 倍の 8 時間になります。

1 次反応の半減期は、$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} = \frac{0.693}{k}$から、初濃度に無関係で一定ですから、初濃度を 20 mg/mL になったときの半減期も同じ 4 時間です。

2 次反応の半減期は、$t_{1/2} = \frac{1}{kC_0}$から、濃度と反比例の関係です。

したがって、濃度が 2 倍の 20 mg/mL になれば、半減期は 1/2 の 2 時間になります。

答：化合物 A の半減期　2 時間、化合物 B の半減期　4 時間、化合物 C の半減期　8 時間

別解

それぞれの反応式から消失速度定数を算出したのち、初濃度を 20 mg/mL にしたときの半減期を求めることもできます。その場合には、下記のようにして計算します。

0 次反応の半減期は、$t_{1/2} = \frac{C_0}{2k}$から、

$4 = \frac{10}{2k}$　　　$2k = \frac{10}{4} = 2.5$　　　$k = 1.25$

C は 0 次反応ですから、初濃度を 20 mg/mL に変えたときの半減期は、

$t_{1/2} = \frac{C_0}{2k} = \frac{20}{2\times 1.25} = \frac{20}{2.5} = 8$ 時間 です。

1 次反応の半減期は初濃度に無関係で一定ですから、初濃度を変えても 4 時間です。

2 次反応の半減期は、$t_{1/2} = \frac{1}{kC_0}$から、

$4 = \frac{1}{10k}$　　　$10k = \frac{1}{4} = 0.25$　　　$k = 0.025$

A は 2 次反応ですから、初濃度を 20 mg/mL に変えたときの半減期は、

$t_{1/2} = \frac{1}{kC_0} = \frac{1}{0.025\times 20} = \frac{1}{0.5} = 2$ 時間 です。

答：化合物 A の半減期　2 時間、化合物 B の半減期　4 時間、化合物 C の半減期　8 時間

問 8–4

薬物 A は片対数グラフで、A の濃度と時間の関係が直線になっていますから、1 次反応だということがわかります。また、薬物 B は濃度と時間の関係が直線になっていますから、0 次反応だということがわかります。薬物 A の半減期（A の濃度が 10 mg/mL から 5 mg/mL になるまでの時間）はグラフから、3 日と読み取れます。また、薬物 B の半減期（B の濃度が 10 mg/mL から 5 mg/mL になるまでの時間）はグラフから、8 日と読み取れます。ここから、薬物 B の薬物消失時間kを求めます。$t_{1/2}=\frac{C_0}{2k}$から、

$$k=\frac{C_0}{2\cdot t_{1/2}}=\frac{10}{2\times 8}=\frac{10}{16}=0.625$$

薬物 A は 1 次反応ですから、半減期は初濃度に無関係で一定です。ですから、常に半減期は 3 日です。

したがって、薬物 B の半減期が 3 日になる初濃度を求めればよいことになります。

ゆえに、

$$3=\frac{C_0}{2\times 0.625}=\frac{C_0}{1.25}$$

$$C_0=3\times 1.25=3.75\ \mathrm{mg/mL}$$

第 9 章

問 9–1

(1) $(2\vec{a}+5\vec{b})-2(\vec{a}+2\vec{b})=2\vec{a}+5\vec{b}-2\vec{a}-4\vec{b}=\vec{b}$

(2) $3(2\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{c})+5(-\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})=6\vec{a}-6\vec{b}-9\vec{c}-5\vec{a}+5\vec{b}+10\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

問 9–2

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\vec{b}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=2\vec{a}-2\vec{b}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}}=-\vec{a}+2\vec{b}$

問 9–3

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}=-2\vec{a}+\vec{c}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{TS}}=\overrightarrow{\mathrm{TB}}+\overrightarrow{\mathrm{BS}}=\overrightarrow{\mathrm{RQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\vec{a}-\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{QU}}=\overrightarrow{\mathrm{QP}}+\overrightarrow{\mathrm{PU}}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

問 9–4

$\vec{a}$は、始点からx軸方向、y軸方向にそれぞれ−2、2 進むと終点となるので、

$\vec{a}=(\underbrace{-2}_{x\text{成分}},\underbrace{2}_{y\text{成分}})$

また、大きさは、$|\vec{a}|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\vec{b}$は、始点からx軸方向、y軸方向にそれぞれ 3、4 進むと終点となるので、$\vec{b}=(\underbrace{3}_{x\text{成分}},\underbrace{4}_{y\text{成分}})$

また、大きさは、$|\vec{b}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

$\vec{c}$は、始点からx軸方向、y軸方向にそれぞれ−3、−2 進むと終点となるので、

$\vec{c} = (\underbrace{-3}_{x\text{成分}}, \underbrace{-2}_{y\text{成分}})$

また、大きさは、$|\vec{c}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$\vec{d}$は、始点からx軸方向、y軸方向にそれぞれ 3、0 進むと終点となるので、$\vec{d} = (3, 0)$

また、大きさは、$|\vec{d}| = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$

問 9–5

(1) $\vec{a} + \vec{b} = (-2, -5) + (3, -1) = (-2+3, -5-1) = (1, -6)$

(2) $\vec{a} - \vec{b} = (-2, -5) - (3, -1) = (-2-3, -5-(-1)) = (-5, -4)$

(3) $-5\vec{a} = (-5 \cdot (-2), -5 \cdot (-5)) = (10, 25)$

(4) $-2\vec{a} + 4\vec{b} = -2(-2, -5) + 4(3, -1) = (-2 \cdot (-2), -2 \cdot (-5)) + (4 \cdot 3 + 4 \cdot (-1))$

$= (4, 10) + (12, -4) = (4+12, 10-4) = (16, 6)$

(5) $3(\vec{a} - 2\vec{b}) + 4(-\vec{a} + 3\vec{b}) = 3\vec{a} - 6\vec{b} - 4\vec{a} + 12\vec{b} = -\vec{a} + 6\vec{b} = -(-2, -5) + 6(3, -1)$

$= (2, 5) + (6 \cdot 3 + 6 \cdot (-1)) = (2+18, 5-6) = (20, -1)$

問 9–6

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2, 1) - (4, -2) = (2-4, 1-(-2)) = (-2, 3)$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (-1, 3) - (2, 1) = (-1-2, 3-1) = (-3, 2)$

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

問 9–7

$s\vec{a} + t\vec{b} = s(1, 3) + t(-1, 2) = (s, 3s) + (-t, 2t) = (s-t, 3s+2t)$

これは$\vec{c} = (-1, 7)$と等しいです。

したがって、x成分、y成分がそれぞれ等しいので、次の連立方程式が成り立ちます。

$$\begin{cases} s - t = -1 \\ 3s + 2t = 7 \end{cases}$$

これを解いて、$s = 1$、$t = 2$が得られます。

したがって、$\vec{c} = 1\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{a} + 2\vec{b}$

問 9–8

(1) $3\vec{a} - 4\vec{b} = 3(-1, 4, 3) - 4(2, 5, -3) = (3 \cdot (-1), 3 \cdot 4, 3 \cdot 3) + (-4 \cdot 2, -4 \cdot 5, -4 \cdot (-3))$

$= (-3, 12, 9) + (-8, -20, 12) = (-3-8, 12-20, 9+12) = (-11, -8, 21)$

(2) $-2(3\vec{a} - \vec{b}) + 2(\vec{a} - 2\vec{b}) = -6\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{a} - 4\vec{b} = -4\vec{a} - 2\vec{b} = -4(-1, 4, 3) - 2(2, 5, -3)$

$= (-4 \cdot (-1), -4 \cdot 4, -4 \cdot 3) + (-2 \cdot 2, -2 \cdot 5, -2 \cdot (-3))$

$= (4, -16, -12) + (-4, -10, 6)$

$= (4-4, -16-10, -12+6)$

$= (0, -26, -6)$

問 9–9

(1) $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 4) - (3, -1, -3) = \left(-1-3, 2-(-1), 4-(-3)\right) = (-4, 3, 7)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 7^2} = \sqrt{16+9+49} = \sqrt{74}$

(2) $\overrightarrow{BC} = (2, -2, 2) - (-1, 2, 4) = (2-(-1), -2-2, 2-4) = (3, -4, -2)$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+16+4} = \sqrt{29}$

(3) $\overrightarrow{CA} = (3, -1, -3) - (2, -2, 2) = (3-2, -1-(-2), -3-2) = (1, 1, -5)$

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-5)^2} = \sqrt{1+1+25} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

問 9–10

$r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} = r(-1, 2, 1) + s(0, -3, 2) + t(4, -2, -1)$

$= (-r, 2r, r) + (0, -3s, 2s) + (4t, -2t, -t)$

$= (-r+4t, 2r-3s-2t, r+2s-t)$

これが$\vec{d} = (10, 4, -5)$と等しいです。

したがって、x成分、y成分、z成分がそれぞれ等しいので、次のr、s、tについての 3 元連立方程式が成り立ちます。

$$\begin{cases} -r+4t=10 & \cdots\cdots ① \\ 2r-3s-2t=4 & \cdots\cdots ② \\ r+2s-t=-5 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②×2+③×3 から、$7r - 7t = -7$

したがって、$r - t = -1$ ⋯⋯ ④

①、④式から、r、tについて解くと、$r=2$、$t=3$を得ます。

これを③式に代入し、$s=-2$

したがって、$\vec{d} = 2\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$

問 9–11

(1) AC=$\sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$、$\angle$BAC=$\frac{\pi}{4}$ から、

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 4$

(2) BD=$2\sqrt{2}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BD}$のなす角は$\frac{3}{4}\pi$ から、

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 2 \cdot 2\sqrt{2}\cos\frac{3}{4}\pi = 4\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -4$

(3) $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$のなす角は$\frac{\pi}{2}$（直交しています）ですから、$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

(4) $\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{CB}$のなす角はπですから、$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = 2 \cdot 2\cos\pi = 4 \cdot (-1) = -4$

問 9–12

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot(-6) + 3\cdot 4 = -12 + 12 = 0$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 2 + (-3)\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 = 6 + 3 - 2 = 7$

問 9–13

(1) なす角を θ と置くと、

$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-1\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot(-1)}{\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}} = \frac{-2\sqrt{3}}{2\cdot 2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって、$\theta = \frac{5}{6}\pi$

(2) なす角を θ と置くと、

$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1\cdot(-1)+(-1)\cdot 2+0\cdot 2}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}} = \frac{-1-2+0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

したがって、$\theta = \frac{3}{4}\pi$

問 9–14

(1) 3 行で 3 列からなる行列なので、3 次の正方行列です。

(2) $(3,2)$ 成分は 3 行目で 2 列目の成分ですから、-3です。

(3) 対応するすべての成分が等しいので、

$(3,1)$ 成分から、$x = 3$

$(1,3)$ 成分から、$2y = -2$

したがって、$y = -1$

$(3,3)$ 成分から、$3z - 1 = 5$

したがって、$z = 2$

問 9–15

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & -3+2 & 0-7 \\ -2+1 & 5+0 & 2-3 \\ 4-2 & 0+4 & -3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 & -3-2 & 0-(-7) \\ -2-1 & 5-0 & 2-(-3) \\ 4-(-2) & 0-4 & -3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ -3 & 5 & 5 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$

(3) $2\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot(-3) & 2\cdot 0 \\ 2\cdot(-2) & 2\cdot 5 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 0 & 2\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -4 & 10 & 4 \\ 8 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

(4) $-2\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 4 & -10 & -4 \\ -8 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 & -21 \\ 3 & 0 & -9 \\ -6 & 12 & 9 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 & 12 & -21 \\ 7 & -10 & -13 \\ -14 & 12 & 15 \end{pmatrix}$

問 9–16

(1) $\begin{pmatrix}2 & -2\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-1)+(-2)\cdot 1\\1\cdot(-1)+3\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}-3 & 2\\-1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2\\3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot 4+2\cdot 3 & -3\cdot(-2)+2\cdot 1\\-1\cdot 4+3\cdot 3 & -1\cdot(-2)+3\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12+6 & 6+2\\-4+9 & 2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 8\\5 & 5\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}4 & -2 & -1\\2 & 1 & 3\\-2 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\2 & -1 & 3\\0 & 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-4+0 & 0+2-4 & 4-6+2\\2+2+0 & 0-1+12 & 2+3-6\\-2-2+0 & 0+1+12 & -2-3-6\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\4 & 11 & -1\\-4 & 13 & -11\end{pmatrix}$$

問 9–17

(1) $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\-1 & -2\end{pmatrix}$について、$ad-bc=3\cdot(-2)-5\cdot(-1)=-6+5=-1\neq 0$

したがって、逆行列は存在します。

逆行列は、$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-2 & -5\\1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\-1 & -3\end{pmatrix}$となります。

(2) $B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\2 & -4\end{pmatrix}$について、$ad-bc=(-2)(-4)-3\cdot 2=8-6=2\neq 0$

したがって、逆行列は存在します。

逆行列は、$B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4 & -3\\-2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -\frac{3}{2}\\-1 & -1\end{pmatrix}$となります。

(3) $C=\begin{pmatrix}3 & -2\\-9 & 6\end{pmatrix}$について、$ad-bc=3\cdot 6-(-2)(-9)=18-18=0$

したがって、逆行列は存在しません。

問 9–18

(1) 係数行列は、$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\3 & -1\end{pmatrix}$

したがって、連立方程式を行列の積で表すと、$\begin{pmatrix}1 & -2\\3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$となります。

$$ad-bc=1\cdot(-1)-(-2)\cdot 3=-1+6=5\neq 0$$

ゆえに、逆行列が存在して、

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\3 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & 2\\-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1+16\\-3+8\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}15\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

したがって、$x=3$、$y=1$

(2) 係数行列は$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\-1 & 2\end{pmatrix}$

したがって、連立方程式を行列の積で表すと、$\begin{pmatrix}3 & 4\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}$となります。

$$ad-bc=3\cdot 2-4\cdot(-1)=6+4=10\neq 0$$

ゆえに、逆行列が存在して、

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\-1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}2 & -4\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-4+24\\-2-16\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}20\\-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$$

したがって、$x=2$、$y=-2$

問 9–19

(1) $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - (-2) \cdot (-5) = 12 - 10 = 2$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - (-2) \cdot 1 = -2 + 2 = 0$

(3) $\begin{vmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

$= (-4) \cdot (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 6 + (-1) \cdot 4 \cdot 5 - (-1) \cdot (-3) \cdot 6 - 2 \cdot 4 \cdot (-4) - 1 \cdot 5 \cdot 2$

$= 12 + 24 - 20 - 18 + 32 - 10 = 20$

(4) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

$= 0 \cdot 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-3) \cdot 1 + (-2) \cdot 2 \cdot 1 - (-2) \cdot 2 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 \cdot 0 - (-3) \cdot 1 \cdot 3$

$= 0 - 9 - 4 + 4 - 0 + 9 = 0$

問 9–20

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) = 15 + 4 = 19 \neq 0$

したがって、

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}}{19} = \frac{3 \cdot 3 - 2 \cdot (-5)}{19} = \frac{19}{19} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}}{19} = \frac{5 \cdot (-5) - 3 \cdot (-2)}{19} = \frac{-25+6}{19} = \frac{-19}{19} = -1$$

したがって、$x = 1$、$y = -1$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 16 + 9 - 6 - (-4) - (-12) - (-18) = 53 \neq 0$

したがって、

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 21 & 4 & 3 \\ -6 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{53} = \frac{32-54+42-24-(-24)-126}{53} = \frac{-106}{53} = -2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -3 & 21 & 3 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix}}{53} = \frac{84+12-18-(-21)-(-36)-(-24)}{53} = \frac{159}{53} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 21 \\ 1 & -2 & -6 \end{vmatrix}}{53} = \frac{-48+63+24-16-(-84)-54}{53} = \frac{53}{53} = 1$$

したがって、$x = -2$、$y = 3$、$z = 1$

第 10 章

問 10–1

(1) 7!=7・6・5・4・3・2・1=5040

(2) ${}_7P_4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

(3) ${}_5C_2 = \frac{{}_5P_2}{2!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

(4) ${}_7C_4 = {}_7C_3 = \frac{{}_7P_3}{3!} = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = 35$

問 10–2

1 回目、2 回目の結果を、（1 回目、2 回目）と表すと、

$U = \{(表, 表), (表, 裏), (裏, 表), (裏, 裏)\}$となります。

表と裏が 1 枚ずつ出る事象を A とすると、$A = \{(表, 裏), (裏, 表)\}$となります。

したがって、場合の数は、$n(U) = 4$、$n(A) = 2$

ゆえに、求める確率は、$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

問 10–3

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$、$A = \{1, 3, 5\}$、$B = \{5, 6\}$、$C = \{1, 2\}$となります。

(1) $A \cap B = \{5\}$ から、$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

(2) $A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$ から、$P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(3) B、Cは、互いに排反です。したがって、$P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$

問 10–4

A 工場の製品であることを事象A、不良品である事象をBとすると、

$P(A) = \frac{3}{5}$、$P_A(B) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

したがって、求める確率は、$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{100} = 0.03$

問 10–5

大量の製品から抜き出すので、 1 個ずつ抜き出す際の不良品の確率 0.05 は変わらないと考えて差し支えありません。

したがって、求める確率は反復試行の定理から、

$${}_5C_2 0.05^2 \cdot 0.95^{5-2} = \frac{{}_5P_2}{2!} \cdot 0.05^2 \cdot 0.95^3 = \frac{5\cdot4}{2\cdot1} \cdot 0.0025 \cdot 0.857375$$

$$= 0.021434375 \fallingdotseq 0.021$$

問 10–6

$P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 4) = P(X = 5) = P(X = 6) = \frac{1}{6}$

となります。したがって、確率分布表は次のようになります。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

問 10–7

確率分布表は、次のようになります。（問 10–6 参照）

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

したがって、平均値 μ、分散σ^2、標準偏差 σ は、

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$$

p_iは確率変数がとり得るそれぞれの値x_iに対応する確率です。

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$
$$= \left(1-\frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(2-\frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(3-\frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(4-\frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(5-\frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(6-\frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$$
$$= \frac{25}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{25}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{70}{24} = \frac{35}{12} \fallingdotseq 2.917$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2.917} \fallingdotseq 1.708$$

別解

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2$$
$$= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} - \frac{49}{4}$$
$$= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12} \fallingdotseq 2.917$$

問 10–8

(1) サイコロを 1 個投げたとき、 1 の目が出る確率は$\frac{1}{6}$で、各回の試行は独立です。
したがって、確率変数Xは二項分布$B\left(720, \frac{1}{6}\right)$に従います。

(2) $\mu = np = 720 \cdot \frac{1}{6} = 120$ 回　　n はサイコロを投げる回数、p は 1 の目が出る確率です。

$\sigma^2 = np(1-p) = 720 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 100$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{100} = 10$ 回

問 10–9

(1) $P(22 \leqq X \leqq 26.4) = P\left(\frac{22-22}{10} \leqq Z \leqq \frac{26.4-22}{10}\right) = P(0 \leqq Z \leqq 0.44)$

$= P(0.44) = 0.17003$

(2) $P(10.4 \leqq X \leqq 14.7) = P\left(\frac{10.4-22}{10} \leqq Z \leqq \frac{14.7-22}{10}\right) = P(-1.16 \leqq Z \leqq -0.73)$

$= P(1.16) - P(0.73) = 0.37698 - 0.26730 = 0.10968$

(3)　$P(X \leqq 29.8) = P\left(Z \leqq \frac{29.8-22}{10}\right) = P(Z \leqq 0.78) = 0.5 + P(0.78)$

$= 0.5 + 0.28230 = 0.78230$

問 10–10

体重をXと置くと、Xは正規分布$N(67.3, 11.1^2)$に従います。また、体重が 45 kgから 80 kgの人の割合は、$P(45 \leqq X \leqq 80)$となります。Xを標準化した確率変数をZとすると、

$$P(45 \leqq X \leqq 80) = P\left(\frac{45-67.3}{11.1} \leqq Z \leqq \frac{80-67.3}{11.1}\right) = P(-2.01 \leqq Z \leqq 1.14)$$
$$= 0.47778 + 0.37286 = 0.85064 \fallingdotseq 85.1\ \%$$

問 10–11

体重をXと置くと、Xは正規分布$N(67.3, 11.1^2)$に従います。

両側 5 %点は、$\mu \pm 1.96\sigma$で得られるので、

両側 5 %点は、$67.3 \pm 1.96 \times 11.1 = 67.3 \pm 21.756 = 89.056$ kg、45.544 kg

第 11 章

問 11–1

(1)　名義尺度

「毛髪色」は名義尺度に分類されます。その理由は以下のとおりです。

①毛髪色はカテゴリーの違いを表す質的データです。②順序関係や差異の大きさを表すことができません。③黒髪と栗毛といったカテゴリー間で計算することができません。したがって、「毛髪色」は名義尺度に分類される質的データです。

(2)　比尺度

「年間に発生した台風の数」は比尺度に分類されます。その理由は以下のとおりです。

①0 台風を絶対的零点として、台風の数の比較が可能です。台風の数がゼロである状態は台風が 1 つも発生しなかったという意味をもちます。②台風の数の間隔に意味があります。たとえば、1 年間で台風の数が 10 から 20 に増加した場合、その間隔は 10 です。③台風の数を 2 倍、3 倍するなどの比率計算が可能です。たとえば、1 年間で台風の数が 20 から 40 に増加した場合、その比率は 2 倍です。したがって、「年間に発生した台風の数」のデータは比尺度に分類される量的データです。

(3)　名義尺度

「病気の有無」は名義尺度に分類されます。その理由は以下のとおりです。

①「病気がある」または「病気がない」という情報は、2 つの異なるカテゴリーに分類されます。どちらがより重要か、どちらが大きいかという概念はありません。②これらのカテゴリー

間には順序や大小関係が存在しません。したがって、「病気の有無」のデータは名義尺度は名義尺度に分類される質的データです。

(4) 順序尺度

肥満度が順序尺度に分類されます。その理由は以下のとおりです。

①肥満度のカテゴリーは、やせ→標準→肥満→高度肥満のように順序付けが可能です。肥満度が高いカテゴリーほど、より重度の肥満を示しています。②カテゴリー間の差や比率には意味がありません。たとえば、やせから標準になるという変化はあるものの、その間隔が均等であるとはいえません。したがって、「肥満度」は順序尺度に分類される量的データです。

(5) 比尺度

来局患者数が比尺度に分類されます。その理由は以下のとおりです。①来局患者数にはゼロ点が存在します。来局患者数がゼロということは、来局患者がいない状態を意味します。②来局患者数の間隔には意味があります。たとえば、来局患者数が 100 人から 200 人に増加した場合、その間隔は 100 人です。③来局患者数の比率には意味があります。たとえば、来局患者数が 200 人から 400 人に増加した場合、その比率は 2 倍です。したがって、「来局患者数」は比例尺度に分類される量的データです。

問 11–2

(a) 小さい順（昇順）にデータを並べます。

14.1	14.8	14.9	15.0	15.1	15.1	15.3	15.4	15.5	15.6	15.7	15.8	15.8	15.9	16.0	16.1	16.2	16.3	16.3	16.7

(b) 階級数を決めます。

$$\text{階級数} = 1 + \frac{\log 20}{0.30103} = 1 + \frac{1.30103}{0.30103} = 1 + 4.3 = 5.3 \cong 6$$

(c) 階級の幅を決めます。

$$\frac{16.7 - 14.1}{6} = \frac{2.6}{6} = 0.43 \cong 0.5$$

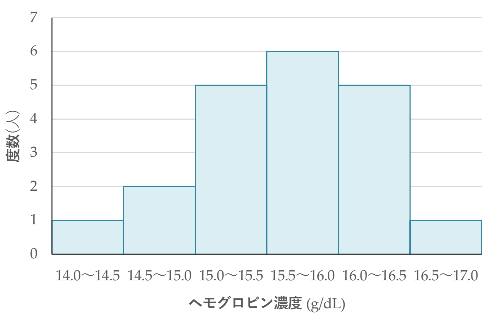
階級数を 6 とした場合、階級幅を 0.5 とすると、切りのよい度数分布表がつくれるはずです。

(d) 度数分布表を作成します。

答：度数分布表

階級 (g/dL) 以上～未満	階級値 (g/dL)	度数（人）
14.0～14.5	14.25	1
14.5～15.0	14.75	2
15.0～15.5	15.25	5
15.5～16.0	15.75	6
16.0～16.5	16.25	5
16.5～17.0	16.75	1

ヒストグラム



問 11–3

$$学生の血圧平均値 = \frac{118 + 129 + 130 + 132 + 110 + 121 + 124 + 126 + 117 + 136}{10}$$

$$= \frac{1243}{10} = 124.3\ \text{mmHg}$$

小さい順（昇順）に血圧値を並び替えます。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
110	117	118	121	124	126	129	130	132	136

学生数が 10 と偶数ですから、中央値は 5 番目と 6 番目の平均値になります。

$$中央値 = \frac{124 + 126}{2} = \frac{250}{2} = 125\ \text{mmHg}$$

問 11–4

(a)　計算表を作成します。

	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	4.2	–0.18	0.0324
2	4.5	0.12	0.0144
3	4.4	0.02	0.0004
4	4.1	-0.28	0.0784
5	4.1	-0.28	0.0784
6	4.4	0.02	0.0004
7	4.5	0.12	0.0144
8	4.8	0.42	0.1764
9	4.3	–0.08	0.0064
10	4.5	0.12	0.0144
合計	43.8		0.4160
平均$\bar{x}$	4.38		

(b)　平均値を求めます。

$$平均値\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{4.2 + 4.5 + 4.4 + 4.1 + 4.1 + 4.4 + 4.5 + 4.8 + 4.3 + 4.5}{10}$$

$$= \frac{43.8}{10} = 4.38\ \text{mg/dL}$$

(c)　次に、分散と標準偏差を求めます。

$$不偏分散U^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

$$= \frac{(4.2 - 4.38)^2 + (4.5 - 4.38)^2 + (4.4 - 4.38)^2 + \cdots + (4.5 - 4.38)^2}{10 - 1}$$

$$= 0.0462\ (\text{mg/dL})^2$$

$$標準偏差S = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.0462} = 0.215\ \text{mg/dL}$$

問 11–5

42、46、53、57、64、67、72、76、83、85

10 人ですから、中央値は、5 番目の値と 6 番目の値の平均値になります。したがって、

$$中央値 = \frac{64+67}{2} = \frac{131}{2} = 65.5\ 点$$（第 2 四分位数）

中央値を境界に上の組と下の組に分けると、

下半分は、42、46、53、57、64

下半分の中央値は、53 点ですから、第 1 四分位数は 53 点です。

また、上半分は 67、72、76、83、85

上半分の中央値は、76 点ですから、第 3 四分位数は 76 点です。

問 11–6

(a) 計算表を作成します。

	旧試薬 (X)	新試薬 (Y)	X^2	Y^2	XY
1	0.85	0.72	0.7225	0.5184	0.612
2	1.32	1.15	1.7424	1.3225	1.518
3	1.75	1.63	3.0625	2.6569	2.8525
4	2.2	2.04	4.84	4.1616	4.488
5	2.97	2.76	8.8209	7.6176	8.1972
6	3.3	3.01	10.89	9.0601	9.933
7	3.8	3.63	14.44	13.1769	13.794
8	4.15	3.85	17.2225	14.8225	15.9775
合計	20.34	18.79	61.7408	53.3365	57.3722
平均	2.5425	2.34875			

(b) 変数 X の平均値$\bar{x}$を求めます。

$$\bar{x} = \frac{0.85+1.32+1.75+2.2+2.97+3.3+3.8+4.15}{8} = \frac{20.34}{8} = 2.5425$$

(c) 変数 Y の平均値$\bar{y}$を求めます。

$$\bar{y} = \frac{0.72+1.15+1.63+2.04+2.76+3.01+3.63+3.85}{8} = \frac{18.79}{8} = 2.34875$$

(d) 変数 X の変動$S_x{}^2$ を求めます。

$$S_x{}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - \bar{x}^2 = \frac{61.7408}{8} - 2.5425^2 = 7.7176 - 6.46430625 = 1.25329375$$

(e) 共分散S_{xy}を求めます。

$$S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i \times y_i) - \bar{x}\bar{y} = \frac{57.3722}{8} - 2.5425 \times 2.34875$$

$$= 7.171525 - 5.971696875 = 1.199828125$$

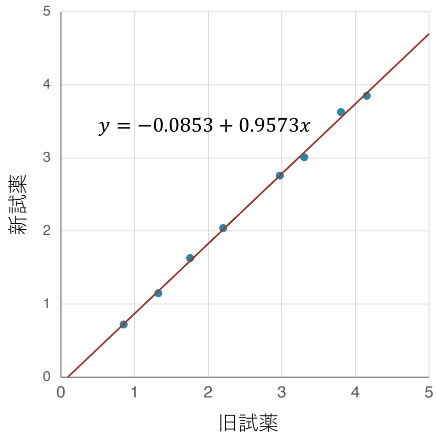
(f)　傾きbと切片aを求めます。

$$傾き b=\frac{S_{xy}}{{S_x}^2}=\frac{1.199828125}{1.25329375}=0.957339909$$

$$切片 a=\bar{y}-b\bar{x}=2.34875-0.957339909\times 2.5425=2.34875-2.434036718$$

$$=-0.0853$$

したがって、回帰方程式は、$y=-0.0853+0.9573x$となります。



問 11–7

母比率の信頼区間を下記の式を利用して算出します。標本比率$\hat{p}$を求めると、

$$\frac{180}{500}=0.36$$

となります。

標本比率$\hat{p}$の 0.36、サンプルサイズnの 500 人を代入します。また、信頼度は 95 %ですから、$Z_{\frac{\alpha}{2}}$は 1.96 です。

$$\hat{p}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\leqq p\leqq\hat{p}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$0.36-1.96\times\sqrt{\frac{0.36(1-0.36)}{500}}\leqq p\leqq 0.36+1.96\times\sqrt{\frac{0.36(1-0.36)}{500}}$$

$$0.36-1.96\times\sqrt{\frac{0.36\times 0.64}{500}}\leqq p\leqq 0.36+1.96\times\sqrt{\frac{0.36\times 0.64}{500}}$$

$$0.36-1.96\times\sqrt{\frac{0.2304}{500}}\leqq p\leqq 0.36+1.96\times\sqrt{\frac{0.2304}{1223}}$$

$$0.36-1.96\times\sqrt{0.0004608}\leqq p\leqq 0.36+1.96\times\sqrt{0.0004608}$$

$$0.36-1.96\times 0.021466252\leqq p\leqq 0.36+1.96\times 0.021466252$$

$$0.36-0.042\leqq p\leqq 0.36+0.042$$

$$0.318\leqq p\leqq 0.402$$

問11–8

(a)　両側検定での仮説を立てます。

帰無仮説 (H_0)：薬品 A における不純物濃度は変化していない。

対立仮説 (H_1)：薬品Aにおける不純物濃度は変化している。

(b)　母平均の検定量zを次の式で求めます。

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

この式に、母平均$\mu = 290$ ppm、標本平均$\bar{x} = 293$ ppm、サンプルサイズ$n = 100$、標準偏差$\sigma = 8$を代入します。

$$z = \frac{293 - 290}{\frac{8}{\sqrt{100}}} = \frac{3}{\frac{8}{10}} = \frac{3}{0.8} = 3.75$$

(c)　両側検定における有意水準５％のとき、$|z| \geqq 1.96$ が棄却域となりますので、H_0は有意水準５％で棄却されます。

したがって、薬品 A における不純物濃度は変化しているといえます。

問 11–9

(a)　小さい順（昇順）に血圧値を並び替えます。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
110	117	118	121	124	126	129	130	132	136

(b)　第 1 四分位数 (Q1) を求めます。

25 パーセンタイルは、$0.25n + 0.75$すから、$0.25 \times 10 + 0.75 = 2.5 + 0.75 = 3.25$番目と求まります。

計算結果が整数にならないので、小さいほうから 3 番目、4 番目の値（118 と 121）と小数部 0.25 を下式①に代入して、第 1 四分位数 (Q1) を求めます。

$$Qn = a(k) + t \times \{a(k+1) - a(k)\} \cdots\cdots ①$$

$$Q1 = 118 + 0.25 \times (121 - 118) = 118 + 0.25 \times 3 = 118 + 0.75 = 118.75 \text{ mmHg}$$

(c)　第 2 四分位数 (Q2) を求めます。

50 パーセンタイルは、$0.5n + 0.5$ですから、$0.5 \times 10 + 0.5 = 5 + 0.5 = 5.5$番目と求まります。

計算結果が整数にならないので、小さいほうから 5 番目、6 番目の値（124 と 126）と小数部 0.5 を①式に代入します。

$$Q2 = 124 + 0.5 \times (126 - 124) = 124 + 0.5 \times 2 = 124 + 1 = 125 \text{ mmHg}$$

(d)　第 3 四分位数 (Q3) を求めます。

75 パーセンタイルは、$0.75n + 0.25$ですから、$0.75 \times 10 + 0.25 = 7.5 + 0.25 = 7.75$番目と求まります。

計算結果が整数にならないので、小さいほうから 7 番目、8 番目の値（129 と 130）と小数部 0.75 を①式に代入します。

$$Q3 = 129 + 0.75 \times (130 - 129) = 129 + 0.75 \times 1 = 129 + 0.75 = 129.75 \text{ mmHg}$$

(e) 四分位範囲 (IQR)

四分位範囲 (IQR) ＝（第 3 四分位数 Q3）－（第 1 四分位数 Q1）ですから、

$$IQR = 129.75 - 118.75 = 11 \text{ mmHg}$$

となります。

答： 第 1 四分位数　118.25 mmHg　　第 2 四分位数　125 mmHg

第 3 四分位数　129.75 mmHg

四分位範囲　11 mmHg